Grundlagen der Analysis: Logik, Mengenlehre, Arithmetik

Rainer Schimming, Greifswald

Inhalt:

Zusammenfassung

Der vorliegende Preprint ist eine Skripte der Anfangs-Abschnitte 1. *Logik*, 2. *Mengenlehre*, 3. *Arithmetik* der Vorlesung *"Analysis"* des Verfassers. Es sollen die im Analysis–Kurs benötigten elementaren Kenntnisse über Aussagen, Mengen, Korrespondenzen, Abbildungen, Operationen, Relationen, die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ u. a. bereitgestellt werden. Die Skripte wird die Vorlesungen und Übungen begleiten und unterstützen; sie kann auch im Selbststudium genutzt werden.

Der Verfasser dankt Frau Dipl.-Math. Gesina Wandt für die technische Herstellung der Skripte. Den Kollegen Peter Schreiber und Lutz Habermann sei für Hinweise gedankt, die zu einer Verbesserung des Textes geführt haben.

1 Logik

1.1 Aussagenlogik

Definition 1. Die *Logik* betrachtet Regeln des Denkens, insbesondere des korrekten Folgerns oder Schließens.

Definition 2. Eine *Aussage* ist ein sprachlicher Ausdruck, welcher entweder *wahr* oder *falsch* ist, d. h. einen *Wahrheitswert wahr* oder *falsch* besitzt.

Beispiele.

Aussage	Wahrheitswert	Verwendete Sprache
Berlin ist eine Stadt.	wahr	Umgangssprache
$2 \cdot 2 = 4$	wahr	Mathematische Formelsprache
3 teilt 8	falsch	Kombination beider
$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$	wahr	Chemische Formelsprache
Jede gerade Zahl ≥ 4 ist Summe zweier Primzahlen.	unbekannt	

Gegenbeispiele. Die folgenden sprachlichen Ausdrücke sind keine Aussagen:

Gib her!

Wie spät ist es?

3 teilt x.

Definition 3. Eine *Aussageoperation* bildet aus gegebenen Aussagen A, B, $C, \ldots$ eine neue Aussage X. Sie heißt *extensional*, falls der Wahrheitswert von X nur von den Wahrheitswerten von A, B, $C, \ldots$ (aber nicht von deren Inhalt!) abhängt, *intensional* sonst. Die Anzahl der *Eingänge* $A, B, C, \ldots$ heißt *Stellenzahl* der Aussageoperation.

Beispiele intensionaler Aussageoperationen:

A weil B (Beziehung Ursache – Wirkung)

A wichtiger als B (Wertung)

Definition 4. Die *Aussagenlogik* betrachtet Aussagen hinsichtlich ihrer Wahrheitswerte, insbesondere extensionale Aussageoperationen.

Definition 5. Extensionale Aussageoperationen mit einem eigenen Symbol:

Aussageoperation	umgangssprachlich	symbolisch
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjunktion	A und B (sowohl A als auch B)	$A \wedge B$
Disjunktion	A oder B (oder beides)	$A \vee B$
Subjunktion	wenn A, so B (A nur dann, wenn B; B immer dann, wenn A)	$A \longrightarrow B$
Bisubjunktion	A genau dann, wenn B	$A \longleftrightarrow B$

Definition 6. Die Zuordung von Wahrheitswerten wahr oder falsch zu *Aussagenvariablen* A, B, $C\ldots$ heißt eine *Belegung* dieser Variablen. Die *Wahrheitswerttabelle* einer extensionalen Aussageoperation gibt für alle Belegungen der *Eingänge* A, B, $C\ldots$ die Belegung des *Ausgangs* X an. Es sei abgekürzt falsch $= 0$, wahr $= 1$.

Definition 7. Die Wahrheitswert–Tabellen zu $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ lauten per definitionem:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \longrightarrow B$	$A \longleftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Satz 1. *Alle einstelligen extensionalen Aussageoperationen sind beschrieben durch die folgenden Wahrheitswerttabellen:*

A	*Kontradiktion*	*Identität*	*Negation*	*Tautologie*
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Alle zweistelligen extensionalen Aussageoperationen sind beschrieben durch

A	B	*Kontr.*	$A \wedge B$	$\neg(A \longrightarrow B)$	A	$\neg(B \longrightarrow A)$	B	$\neg(A \longleftrightarrow B)$	$A \vee B$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\neg(A \vee B)$	$A \longleftrightarrow B$	$\neg B$	$B \longrightarrow A$	$\neg A$	$A \longrightarrow B$	$\neg(A \wedge B)$	*Taut.*
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Definition 8. Die extensionale Aussageoperation (jeder Stellenzahl), deren Ausgang immer falsch ist, heißt *Kontradiktion*, ... immer wahr ist, heißt *Tautologie*.

Definition 9. Seien H, K aus Aussagenvariablen A, B, $C\ldots$ und aus $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ regelrecht aufgebaute Ausdrücke.

Aus H folgt K, $H \Longrightarrow K$, falls $H \longrightarrow K$ für alle Belegungen von A, B, $C\ldots$ wahr (d. h. eine Tautologie) ist.

H ist (logisch) äquivalent zu K, $H \Longleftrightarrow K$, falls $H \longleftrightarrow K$ für alle Belegungen von A, B, $C\ldots$ wahr (d. h. eine Tautologie) ist.

Bemerkungen.

1. Was hier *"regelrecht"* heißt, läßt sich präzisieren, indem man beschreibt, wie entsprechende Ausdrücke rekursiv (d. h. schrittweise) aufgebaut sind.

2. $\Longrightarrow$ und $\Longleftrightarrow$ treffen die intuitiven Vorstellungen vom *logischen Folgern* bzw. von der *logischen Gleichwertigkeit*.

3. Beachte: $\longrightarrow$ und $\longleftrightarrow$ sind Operationen mit Aussagen; $\Longrightarrow$ und $\Longleftrightarrow$ sind dagegen Relationen zwischen Ausdrücken.

Satz 2. Aussagenlogische Gesetze.

Äquivalenzen:

Kommutativgesetze	$A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$
	$A \vee B \Longleftrightarrow B \vee A$
	$A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow B \longleftrightarrow A$
Assoziativgesetze	$(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$
	$(A \longleftrightarrow B) \longleftrightarrow C \Longleftrightarrow A \longleftrightarrow (B \longleftrightarrow C)$
Distributivgesetze	$(A \vee B) \wedge C \Longleftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
	$(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
Verschmelzungsgesetze	$A \wedge (A \vee B) \Longleftrightarrow A$
	$A \vee (A \wedge B) \Longleftrightarrow A$
Doppel–Negations–Regel	$\neg\neg A \Longleftrightarrow A$
De Morgansche Regeln	$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$
	$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
Kontrapositionsregel	$A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \longrightarrow \neg A$

Darstellungen der Subjunktion	$A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B \Longleftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
Darstellung der Bisubjunktion	$A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$

Schlußregeln:

Abtrennungsregel	$(A \longrightarrow B) \wedge A \Longrightarrow B$
Kettenschlußregel	$(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \Longrightarrow (A \longrightarrow C)$
Abschwächungsregeln	$A \Longrightarrow A \vee B$
	$A \Longrightarrow (B \longrightarrow A)$
	$A \wedge B \Longrightarrow A$

Tautologien:

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten	$A \vee \neg A$ *ist immer wahr*
Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch	$\neg(A \wedge \neg A)$ *ist immer wahr*

Beweis der Doppel–Negations–Regel:

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \longleftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

... der Abtrennungsregel:

A	B	$A \longrightarrow B$	$(A \longrightarrow B) \wedge A$	$((A \longrightarrow B) \wedge A) \longrightarrow B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

... des Gesetzes vom ausgeschlossenen Widerspruch:

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
0	1	0	1
1	0	0	1

Geschichte. *"Rechnen mit Gedanken"* ist eine alte Idee bzw. ein Programm, z. B. von den Philosophen R. Lullus (1480) und G. W. Leibniz (1666) formuliert. Logik im heutigen Sinne datiert seit 1847; in dem Jahr erschienen die beiden Bücher

G. Boole: The Mathematical Analysis of Logic.

A. de Morgan: Formal Logic.

1.2 Prädikatenlogik

Problem. Sprachliche Ausdrücke enthalten außer Konstanten typischerweise auch *Variablen* für Objekte (z. B. Mengen, Zahlen, Funktionen, ...). Dafür ist eine Logik zu entwickeln!

Definition 1. Eine *Aussageform* oder ein *Prädikat* ist ein sprachlicher Ausdruck $A(x, y, \dots)$, der endlich viele Variablen $x, y, \dots$ enthält und zu einer Aussage wird, wenn alle Variablen mit Werten belegt werden. Die Anzahl der Variablen heißt die *Stellenzahl* der Aussageform. Eine Aussage ist per definitionem eine *0–stellige Aussageform*.

Beispiele.

Stellenzahl	Variable(n)	Aussageform
0	keine	$2 \cdot 2 = 4$
1	x	3 teilt x. Wahr z. B. für $x = 9$. Falsch z. B. für $x = 8$.
2	x, y	x teilt y.
3	x, y, z	$x + y = z$

Definition 2. Eine *Quantifizierung* von Variablen erzeugt aus einer Aussageform eine solche niedrigerer Stellenzahl.

Definition 3. Quantifizierungen mit einem eigenen Symbol:

Quantifizierung	umgangssprachlich	symbolisch
Generalisierung	für alle x (für jedes x, für beliebiges x)	$\forall x A(x, \dots)$ oder $\bigwedge x A(x, \dots)$
Partikularisierung	es gibt (mindestens) ein x (es existiert (mindestens) ein x)	$\exists x A(x, \dots)$ oder $\bigvee x A(x, \dots)$
verstärkte Partikularisierung	es gibt genau ein x (es existiert genau ein x; es gibt ein und nur ein x)	$\exists! x A(x, \dots)$

Beispiele. Quantifizierungen ohne eigenes Symbol:

umgangssprachlich	durch $\forall$, $\exists$ ausgedrückt
es gibt höchstens ein x mit $A(x)$ (es gibt kein x mit $A(x)$ oder es gibt genau ein x mit $A(x)$)	$\forall x_1 \ \forall x_2 \, (A(x_1) \wedge A(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2)$
es gibt mehrere x mit $A(x)$ (es gibt mehr als ein x mit $A(x)$)	$\exists x_1 \ \exists x_2 (A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)$

Beispiele. Aussagen, die Quantifizierungen enthalten:

1. Gruppenaxiome:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$$\exists e\ \forall x : e \cdot x = x \cdot e = x$$
$$\forall x\ \exists y : x \cdot y = y \cdot x = e$$

2. Sprichwörter.

umgangssprachlich	symbolisch
Hunde, die bellen, beißen nicht	$\forall x(A(x) \wedge B(x) \longrightarrow \neg C(x))$, wobei $A =$ ist ein Hund, $B =$ bellt, $C =$ beißt
Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte	$\forall x\ \forall y(A(x,y) \longrightarrow \exists z B(z))$, wobei $A =$ streiten sich, $B =$ freut sich Genauer: $\forall x\ \forall y(A(x,y) \longrightarrow \exists z : z \neq x \wedge z \neq y \wedge B(z))$

Satz Prädikatenlogische Gesetze.

Kommutativgesetze

$$\forall x \forall y A(x,y,\dots) \iff \forall y \forall x A(x,y,\dots)$$
$$\exists x \exists y A(x,y,\dots) \iff \exists y \exists x A(x,y,\dots)$$
$$\forall x(A(x,\dots) \wedge B(x,\dots)) \iff (\forall x A(x,\dots)) \wedge (\forall x(B(x,\dots))$$
$$\exists x(A(x,\dots) \vee B(x,\dots)) \iff (\exists x A(x,\dots)) \vee (\exists x(B(x,\dots))$$

De Morgansche Regeln

$$\neg \forall x A(x,\dots) \iff \exists x \neg A(x,\dots)$$
$$\neg \exists x A(x,\dots) \iff \forall x \neg A(x,\dots)$$

Abschwächungsregeln

$$\exists x \forall y A(x,y,\dots) \Longrightarrow \forall y \exists x A(x,y,\dots)$$
$$\exists! x A(x,\dots) \Longrightarrow \exists x A(x,\dots)$$

Vereinbarung. Es sei erlaubt, $\forall x\ \forall y \dots$ durch $\forall x, y, \dots$ abzukürzen, $\exists x\ \exists y \dots$ durch $\exists x, y, \dots$ abzukürzen usw.. Der Doppelpunkt $:$ diene als Trennzeichen anstelle von Klammern.

Definition 4. Die *Prädikatenlogik 1. Stufe* betrachtet *Individuen* x, y, $z, \dots$ und *Prädikate* $A(x)$, $A(x,y,\dots)$, $A(x,y,z,\dots), \dots$. Genau die Individuen können dort quantifiziert werden. Die *Prädikatenlogik 2. Stufe* betrachtet Individuen, Prädikate und zusätzlich Prädikate von Prädikaten. Genau die Individuen und die Prädikate können dort quantifiziert werden. Usw.

Beispiele. Gesetze der Prädikatenlogik 2. Stufe:

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $\forall A\ \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$.

Ersetzbarkeitseigenschaft der Gleichheitsrelation: $\forall A\ \forall x, y(x = y \longrightarrow (A(x) \longleftrightarrow A(y)))$.

Geschichte. Die *Klassenlogik* von Aristoteles, eine der ersten wissenschaftlichen Theorien (nach heutiger Auffassung) überhaupt, ist eine Aussagen– und Prädikatenlogik in anderer Form als der heute üblichen. G. Frege's *Begriffschrift* (1859) ist ebenfalls eine alternative Aussagen– und Prädikatenlogik, die sich nicht durchgesetzt hat, weil sie sehr unhandlich ist. Die Prädikatenlogik in der heutigen Form geht auf C. S. Peirce und G. Peano (2. Hälfte des 19. Jahrhunderts) zurück.

1.3 Aufbau einer mathematischen Theorie

Die *Fachsprache* einer mathematischen Theorie setzt sich aus der *Umgangssprache* und einer speziellen *Symbol–* oder *Formelsprache* zusammen.

Definition 1. Man unterscheidet zwei Arten sprachlicher Ausdrücke: Ein *Term* ist ein Ausdruck, der als ein mathematisches Objekt interpretiert werden kann. Eine *Formel* ist ein Ausdruck, der als eine Aussage oder Aussageform interpretiert werden kann.

Im folgenden besprechen wir wichtige Arten von Bausteinen einer mathematischen Theorie: *Axiom, Definition, Satz, Beweis.*

Vorläufige Definition. Ein *Axiom* ist eine als wahr angenommene Aussage. Ein *Axiomensystem* besteht aus endlich vielen Axiomen und wird an den Anfang einer Theorie gesetzt.

Definition 2. Ein *Axiomensystem* ist eine implizite Definition der *Grundbegriffe* einer Theorie im folgenden Sinn: Es führt die Grundbegriffe ein und regelt deren Beziehungen untereinander.

Beispiele.

1. Axiomensystem für die *Gleichheit* $=$:

x, y, $z, \ldots$ bezeichnen mathematische Objekte, A, B, $C, \ldots$ bezeichnen Aussageformen. $x = y$ bedeutet: x ist gleich y.

Reflexivität: $\forall x : x = x$

Transitivität: $\forall x, y, z : x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$

Symmetrie: $\forall x, y : x = y \longrightarrow y = x$

Leibnizsche Ersetzbarkeit: $\forall A \; \forall x, y : x = y \longrightarrow (A(x) = A(y))$

2. Einige Axiome der ebenen Geometrie:

Es gibt *Punkte* P, Q, $R \ldots$ und *Geraden* g, h, $k \ldots$. $P \in g$ bedeutet: Der Punkt P liegt auf der Geraden g. (Die Gerade g geht durch den Punkt P.)

1. $\forall g \; \exists P, Q : P \in g \wedge Q \in g \wedge P \neq Q$.
2. $\forall P, Q$ mit $P \neq Q \; \exists! g : P \in g \wedge Q \in g$.
3. $\forall g \; \exists P : P \notin g$.

Definition 3. Eine *Definition* hat die Form

Definiendum := *Definiens.*

Dabei ist das *Definiendum*, d. h. das zu Definierende, ein abkürzender neuer Name; das *Definiens*, d. h. das Definierende, ist ein durch bekannte sprachliche Mittel gegebener Ausdruck. Sind hier beide Seiten Formeln, so bevorzugt man die Symbolik

Definiendum $:\Longleftrightarrow$ *Definiens.*

Zusätze.

1. Es ist auch erlaubt, die Reihenfolge zu vertauschen:

Definiens =: *Definiendum* bzw. *Definiens* $\Longleftrightarrow:$ *Definiendum.*

2. Umgangssprachlich wird eine Definition ausgedrückt durch *heißt, wird genannt, per definitionem ist* ... (oder auch im Konjunktiv: *heiße, werde genannt, per definitionem sei* ...).

3. Das *genau dann, wenn* in einer Definition ersetzen wir meist durch *falls.*

4. Das *Definiendum* wird üblicherweise durch eine besondere Schriftart hervorgehoben.

Beispiele.

$A := \frac{a+b}{2}$ heißt *Mittelwert* der Zahlen a, b.

Die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion heißt *Kreiszahl* π.

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind *orthogonal*, $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$, falls $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$.

Definition 4. Jedes Axiom ist auch ein *Satz.* Ein *Beweis* in einer Theorie ist eine endliche Folge von Formeln derart, daß sich jede Formel vermöge einer Schlußregel aus den vorhergehenden Formeln und aus schon bewiesenen Sätzen ergibt. Die letzte Formel eines Beweises ist ein *Satz* der Theorie; dieser wird durch den zugehörigen Beweis *bewiesen.*

Bemerkungen.

1. Demgemäß ist eine mathematische Theorie rekursiv (d. h. schrittweise) aufgebaut:

Satz 0. Stufe := Axiom,

Satz 1. Stufe := Aus Axiomen hergeleitet,

Satz 2. Stufe := Aus Axiomen und Sätzen 1. Stufe hergeleitet,

usw.

2. Wiederholung: Wichtige Schlußregeln:

Abtrennungsregel $(A \longrightarrow B) \wedge A \Longrightarrow B$,

Kettenschlußregel $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \Longrightarrow (A \longrightarrow C)$,

De Morgansche Regeln $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,

Prädikatenlogische Abschwächungsregel $\exists x \forall y A(x, y, \dots) \Longrightarrow \forall y \exists x A(x, y, \dots)$,

Prädikatenlogische De Morgansche Regeln $\neg \forall x A(x, \dots) \Longleftrightarrow \exists x \neg A(x, \dots)$,

$\neg \exists x A(x, \dots) \Longleftrightarrow \forall x \neg A(x, \dots)$.

3. Ein nur als Zwischenresultat angesehener Satz heißt auch *Hilfssatz* oder *Lemma*. Ein als besonders wichtig angesehener Satz heißt auch *Hauptsatz* oder *Theorem*. Ein zu einem Satz hinzugefügter Satz heißt auch *Korollar*.

Definition 5. In einem Satz der Form $A \longrightarrow B$ oder $\forall x(A(x) \longrightarrow B(x))$ heißt A bzw. $A(x)$ *Voraussetzung* oder *Prämisse* und heißt B bzw. $B(x)$ *Behauptung* oder *Konklusion*.

Geschichte. Die heutige Auffassung von einer mathematischen Theorie, insbesondere über den axiomatischen Aufbau, geht auf D. Hilbert (1862–1843) zurück. Diese moderne Auffassung ist auch Vorbild für Theorien in den Naturwissenschaften.

2 Mengenlehre

2.1 Der Mengenbegriff

Definition 1. Mengendefinition nach G. Cantor (1895):
Eine *Menge* ist die Zusammenfassung unterscheidbarer einzelner Objekte, genannt *Elemente*, zu einem Ganzen.
$x \in M$ heißt: x ist Element der Menge M (M enthält x). $x \notin M$ heißt $\neg x \in M$.

"Axiom." Mengenbildungsprinzip.
Zu einer "sinnvollen" einstelligen Aussageform A existiert
$M = \{x|A(x)\} :=$ Menge aller x, für die $A(x)$ wahr ist.

Beispiele.
Einermenge $\{a\} := \{x|x = a\}$,
Zweiermenge $\{a, b\} := \{x|x = a \vee x = b\}$,
Dreiermenge $\{a, b, c\} := \{x|x = a \vee x = b \vee x = c\}$,
usw.
Die *leere Menge* $\emptyset := \{x|x \neq x\}$ enthält kein Element.
Für die sogenannten *Zahlbereiche* sind besondere Symbole reserviert:
$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen.

Gegenbeispiel. Antinomie von B. RUSSEL 1902: $M := \{x|x \notin x\}$ definiert keine Menge M, d. h. die Aussageform $A(x) := x \notin x$ ist nicht "sinnvoll".

Beweis. Übung.

Definition 2. Sei E eine Menge $\neq \emptyset$, genannt *Grundbereich*. A eine einstellige Aussageform. Man definiert

$$\forall x \in E : A(x) :\Longleftrightarrow \forall x : x \in E \longrightarrow A(x)$$
$$\exists x \in E : A(x) :\Longleftrightarrow \exists x : x \in E \wedge A(x)$$
$$\{x \in E|A(x)\} :\Longleftrightarrow \{x|x \in E \wedge A(x)\}$$

Bemerkung. Der Übergang von E und A zu

$$M := \{x \in E|A(x)\}$$

heißt auch *klassisches Definitionsschema*. Es wurde von ARISTOTELES eingeführt. Dabei heißt E die *Gattung*, A das *artbildende Merkmal*, M die *Art*.

Beispiele für das klassische Definitionsschema:

1. $M = \{x \in \mathbb{R}|f(x) = 0\}$ ist die *Lösungsmenge* der Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$ im Bereich der reellen Zahlen.

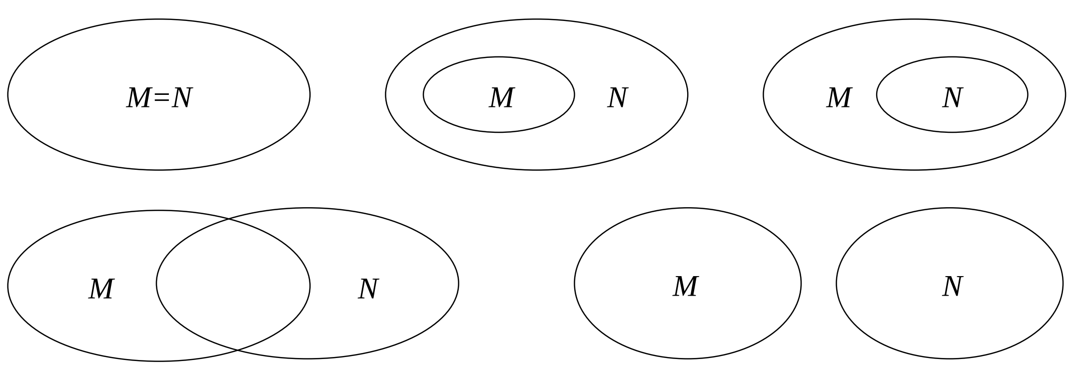
2. *Intervalle* reeller Zahlen

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\},$$
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\},$$
$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\},$$
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R}|a < x \leq b\}.$$

Definition 3. Veranschaulichung von Mengen nach L. EULER.

Ein *Mengendiagramm* ordnet Mengen M, $N, \ldots$ Punktmengen in der Ebene zu mit gleichen Verhältnissen bezüglich gemeinsamer / nicht gemeinsamer Elemente.

Beispiele. Mögliche Diagramme für zwei Mengen M, N:



Geschichte. Georg Cantor (1845–1918) ist der Begründer der Mengenlehre; ab 1874 publizierte er darüber. Seine Ideen waren damals revolutionär und setzten sich nur gegen Widerstände durch. Die Antinomie von B. Russell (1901) sowie bald darauf entdeckte weitere Antinomien der *"naiven Mengenlehre"* machten einen axiomatischen Aufbau notwendig. Es gibt verschiedene Varianten der *axiomatischen Mengenlehre*; meist beruft man sich auf die von E. Zermelo und A. Fraenkel (1904–1908).

2.2 Rechnen mit Mengen

Axiom. Extensionalitätsprinzip.

Zwei Mengen sind gleich, falls sie dieselben Elemente haben.

D. h. $M = N$, falls $\forall x : x \in M \longleftrightarrow x \in N$.

Definition 1. M ist *Teilmenge (Untermenge)* von N, $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist, d. h. $\forall x : x \in M \longrightarrow x \in N$. M ist *echte Teilmenge* von N, $M \subset N$, falls $M \subseteq N$ und $M \neq N$. Die Relation $\subseteq$ zwischen Mengen heißt *Inklusion*, $\subset$ heißt *echte Inklusion*. Die Menge aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge* von M und wird mit 2^M bezeichnet.

Beispiele.

1. $\{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} \subseteq \ldots$.

2. Echte Inklusionen der Zahlbereiche: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3. Für jede Menge M gilt $\emptyset \subseteq M$.

4. Für eine Einermenge $M = \{a\}$ ist $2^M = \{\emptyset, \{a\}\}$. Für eine Zweiermenge $M = \{a, b\}$ mit $a \neq b$ ist $2^M = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Satz 1. Gesetze für die Inklusion:

Reflexivität	$M \subseteq M$
Transitivität	$M \subseteq N$ *und* $N \subseteq L \longrightarrow M \subseteq L$
Antisymmetrie	$M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M \longrightarrow M = N$

Gesetze für die echte Inklusion:

Irreflexivität	*nicht* $M \subset M$
Transitivität	$M \subset N$ *und* $N \subset L \longrightarrow M \subset L$
Asymmetrie	$M \subset N \longrightarrow$ *nicht* $N \subset M$

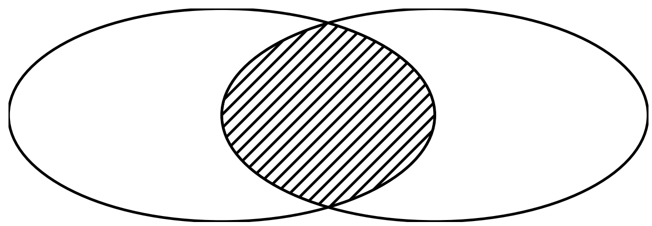
Beweis für $\subseteq$:

Reflexivität: $\forall x\ (x \in M \longrightarrow x \in M) \Longrightarrow M \subseteq M$.

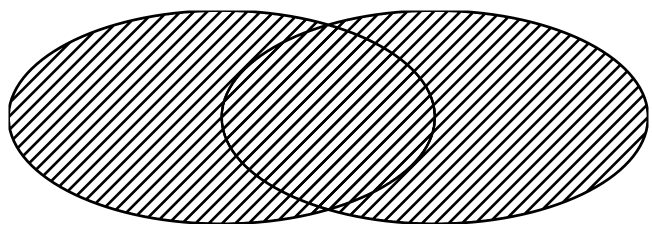
Transitivität: $M \subseteq N$ und $N \subseteq L \Longrightarrow \forall x :\ (x \in M \longrightarrow x \in N) \wedge (x \in N \longrightarrow x \in L) \Longrightarrow \forall x\ (x \in M \longrightarrow x \in L) \Longrightarrow M \subseteq L$.

Antisymmetrie: $M \subseteq N$ und $N \subseteq M \Longrightarrow \forall x: \ (x \in M \longrightarrow x \in N) \wedge (x \in N \longrightarrow x \in L) \Longleftrightarrow \forall x \ (x \in M \longleftrightarrow x \in N) \Longleftrightarrow M = N$.

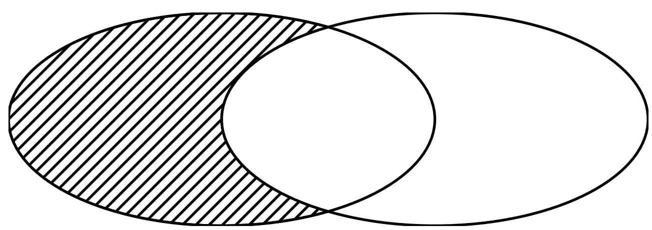
Definition 2. Der *Durchschnitt* zweier Mengen M und N ist $M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$



Die *Vereinigung* von M und N ist $M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}$



Die *Differenz* von M und N ist $M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}$



Zwei Mengen M, N heißen *elementfremd* oder *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$.

Satz 2. Gesetze für Durchschnitt und Vereinigung:

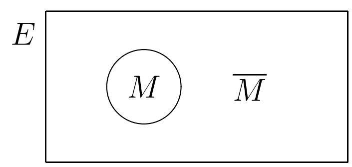
Kommutativgesetze	$M \cap N = N \cap M$
	$M \cup N = N \cup M$
Assoziativgesetze	$(M \cap N) \cap L = M \cap (N \cap L)$
	$(M \cup N) \cup L = M \cup (N \cup L)$
Distributivgesetze	$(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$
	$(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L)$
Verschmelzungsgesetze	$M \cap (M \cup N) = M$
	$M \cup (M \cap N) = M$

Beweis des 1. Distributivgesetzes: Für alle x ist

$$\begin{aligned} x \in (M \cup N) \cap L &\iff x \in M \cup N \wedge x \in L \\ &\iff (x \in M \vee x \in N) \wedge x \in L \\ &\iff (x \in M \wedge x \in L) \vee (x \in N \wedge x \in L) \\ &\iff x \in M \cap L \vee x \in N \cap L \\ &\iff x \in (M \cap L) \cup (N \cup L) \end{aligned}$$

Gemäß dem Extensionalitätsprinzip ist $(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$.

Definition 3. Für die Teilmenge M eines festen *Grundbereiches* E heißt $\overline{M} := E \setminus M$ auch *Komplement*.



Satz 3. Gesetze für das Komplement.
$\overline{\overline{M}} = M, \quad \overline{\emptyset} = E, \quad \overline{E} = \emptyset, \quad M \cup \overline{M} = E, \quad M \cap \overline{M} = \emptyset,$
De Morgansche Regeln: $\quad \overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}, \quad \overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}.$

Beweis der 1. De Morganschen Regel: Für alle x ist

$$\begin{aligned} x \in \overline{M \cap N} &\iff \neg(x \in M \cap N) \\ &\iff \neg(x \in M \wedge x \in N) \\ &\iff (\neg x \in M) \vee (\neg x \in N) \\ &\iff x \in \overline{M} \vee x \in \overline{N} \\ &\iff x \in \overline{M} \cup \overline{N} \end{aligned}$$

Aus dem Extensionalitätsprinzip folgt die Behauptung $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

2.3 Produktmenge, Korrespondenz, Abbildung

Idee. Zweiermenge $\{x, y\}$ = <u>ungeordnete</u> Zusammenfassung von x, y. $\{x, y\} = \{y, x\}$.
Geordnetes Paar (x, y) = <u>geordnete</u> Zusammenfassung von x, y. $(x, y) \neq (y, x)$.
n–tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = <u>geordnete</u> Zusammenfassung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definition 1. Das *geordnete Paar* aus zwei Elementen x, y ist $(x,y) := \{\{x,y\},\{x\}\}$. Für $n \geq 3$ sind *n–tupel* rekursiv definiert durch

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Spezialfälle.

n	n–tupel
2	geordnetes Paar
3	Tripel
4	Quadrupel
5	Quintupel

Satz 1. "Axiom" des geordneten Paares bzw. n–tupels.

$$(x,y) = (x', y') \longleftrightarrow x = x' \textit{ und } y = y'.$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1', x_2', \ldots, x_n') \longleftrightarrow x_1 = x_1' \textit{ und } x_2 = x_2' \ldots \textit{ und } x_n = x_n'.$$

Beweis. Übung.

Definition 2. Das *Produkt (Mengenprodukt, Produktmenge)* zweier Mengen M und N sei

$$M \times N := \{(x,y) | x \in M \text{ und } y \in N\}.$$

Das *Produkt (Mengenprodukt, Produktmenge)* von Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sei

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2 \ldots \text{ und } x_n \in M_n\}.$$

Die *n–te Potenz* von M sei

$$M^n := M \times M \times \cdots \times M \ (n\text{–mal}).$$

Man setzt außerdem noch $M^1 = M$.

Beispiele.

1. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n–mal) $= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ heißt *n–dimensionaler reeller Zahlenraum.*

2. $[0,1] := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ heißt *Einheitsintervall*

$[0,1] \times [0,1]$ heißt *Einheitsquadrat.*

$[0,1]^n = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ (n–mal) heißt *n–dimensionaler Einheitswürfel.*

Satz 2. Gesetze für das Mengenprodukt:

Distributivgesetze
$$(M_1 \cap M_2) \times N = (M_1 \times N) \cap (M_2 \times N)$$
$$(M_1 \cup M_2) \times N = (M_1 \times N) \cup (M_2 \times N)$$
$$(M_1 \setminus M_2) \times N = (M_1 \times N) \setminus (M_2 \times N)$$
$$N \times (M_1 \cap M_2) = (N \times M_1) \cap (N \times M_2)$$
$$N \times (M_1 \cup M_2) = (N \times M_1) \cup (N \times M_2)$$
$$N \times (M_1 \setminus M_2) = (N \times M_1) \setminus (N \times M_2)$$

Monotoniegesetz $M_1 \subseteq M_2 \longrightarrow M_1 \times N \subseteq M_2 \times N$ *und* $N \times M_1 \subseteq N \times M_2$

Beweis. Übung.

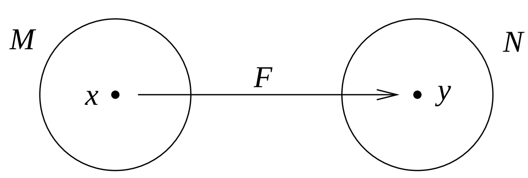
Definition 3. Eine *Korrespondenz* oder *Zuordnung* F *aus* einer Menge $M \neq \emptyset$ *in* eine Menge $N \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge der Produktmenge: $F \subseteq M \times N$.
Der *Definitionsbereich* von F ist $\mathcal{D}(F) := \{x | \exists y : (x, y) \in F\}$,
der *Wertebereich* von F ist $\mathcal{W}(F) := \{y | \exists x : (x, y) \in F\}$.
Wenn $(x, y) \in F$, so heißt x hier ein *Original* oder *Urbild*, y ein *Wert* oder *Bild*.

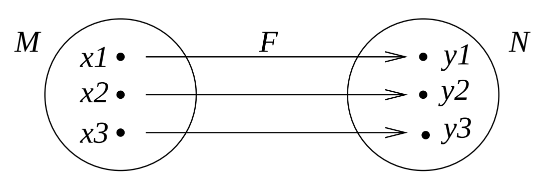
Bemerkung. $F \subseteq M \times N$ enthält genau die (x, y), für die $y \in N$ dem $x \in M$ zugeordnet wird. Ein endliches $F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ ist gleichwertig zu einer *Wertetabelle*

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	
x_n	y_n

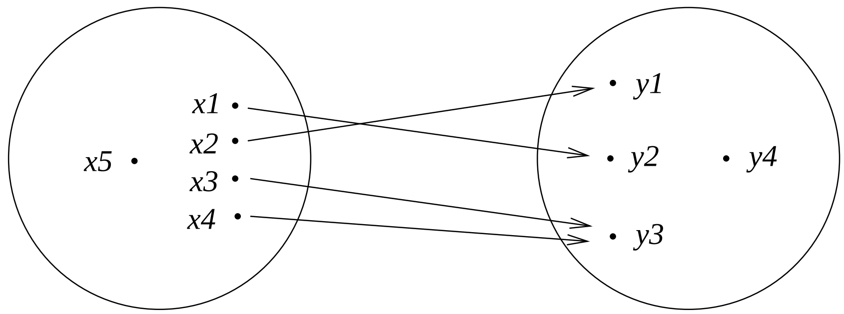
Die obige Definition verallgemeinert die Vorstellung von F als einer Art von Wertetabelle.

Mengendiagramme:





Beispiele. $M = \{x_1, \ldots, x_5\}$, $N = \{y_1, \ldots, y_4\}$, $F = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_3), (x_4, y_3)\}$.



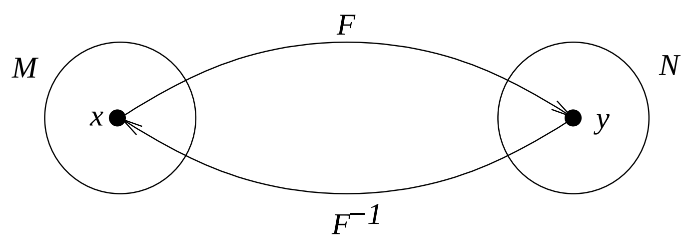
Definition 4. Operationen mit Korrespondenzen:
Die *inverse Korrespondenz* oder *Umkehrkorrespondenz* zu $F \subseteq M \times N$ ist

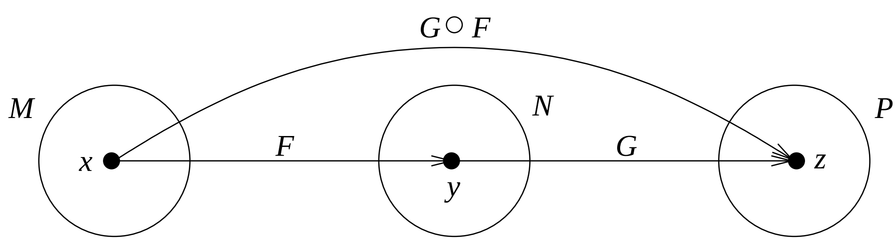
$$F^{-1} := \{(y, x) | (x, y) \in F\}.$$

Die *Komposition* oder *Verkettung* von $F \subseteq M \times N$ und $G \subseteq N \times P$ ist

$$G \circ F := \{(x, z) | \exists y : (x, y) \in F \text{ und } (y, z) \in G\}.$$

Mengendiagramme:



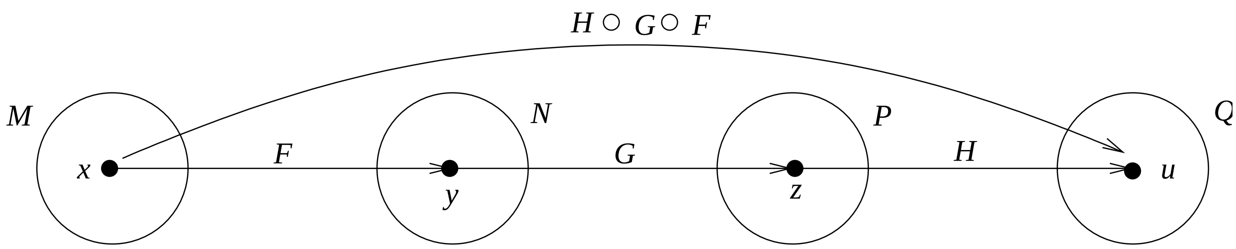


Obiges Beispiel. $M = \{x_1, \ldots, x_5\}$, $N = \{y_1, \ldots, y_4\}$,
$F = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_3), (x_4, y_3)\} \Longrightarrow F^{-1} = \{(y_2, x_1), (y_1, x_2), (y_3, x_3), (y_3, x_4)\}$.

Satz 3. Gesetze für Inversion und Komposition:

Rollentausch von $\mathcal{D}$ und $\mathcal{W}$	$\mathcal{D}(F^{-1}) = \mathcal{W}(F), \quad \mathcal{W}(F^{-1}) = \mathcal{D}(F),$
Doppelte Inversion	$(F^{-1})^{-1} = F,$
Assoziativgesetz	$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F),$
Inversionsgesetz	$(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}.$

Beweis des Assoziativgesetzes:



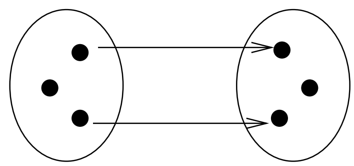
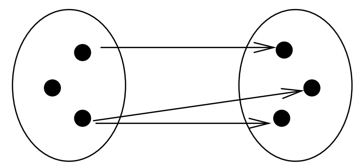
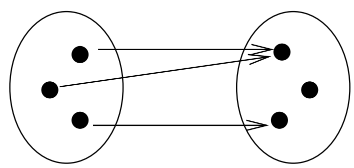
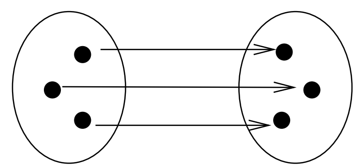
$$\begin{aligned}
(x,u) \in (H \circ G) \circ F &\iff \exists y : (x,y) \in F \text{ und } (y,u) \in H \circ G \\
&\iff \exists y : (x,y) \in F \text{ und } (\exists z : (y,z) \in G \text{ und } (z,u) \in H) \\
&\iff \exists y \exists z : (x,y) \in F \text{ und } (y,z) \in G \text{ und } (z,u) \in G \\
&\iff \exists z : (\exists y : (x,y) \in F \text{ und } (y,z) \in G) \text{ und } (z,u) \in H \\
&\iff \exists z : (x,z) \in G \circ F \text{ und } (z,u) \in H \\
&\iff (x,u) \in H \circ (G \circ F)
\end{aligned}$$

Gemäß der Definition der Mengengleichheit ist $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$.

Definition 5. *Erste Einteilung* von Korrespondenzen:
Eine Korrespondenz $F \subseteq M \times N$ heißt … falls …

	in N	*auf N*
aus M	$\mathcal{D}(F) \subseteq M$, $\mathcal{W}(F) \subseteq N$	$\mathcal{D}(F) \subseteq M$, $\mathcal{W}(F) = N$
von M	$\mathcal{D}(F) = M$, $\mathcal{W}(F) \subseteq N$	$\mathcal{D}(F) = M$, $\mathcal{W}(F) = N$

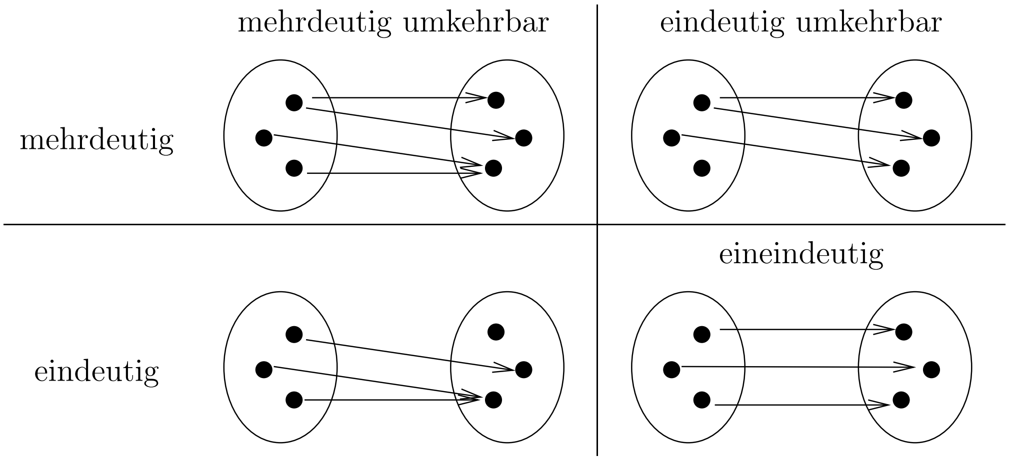
Beispiele.

	in N und nicht auf N	auf N
aus M und nicht von M	$F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ 	$F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$ 
von M	$F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1)\}$ 	$F = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ 

Definition 6. *Zweite Einteilung* von Korrespondenzen:
$F \subseteq M \times N$ heißt *eindeutig*, falls $(x, y_1), (x, y_2) \in F \longrightarrow y_1 = y_2$,
$\ldots$ *mehrdeutig* sonst.
$F \subseteq M \times N$ heißt *eindeutig umkehrbar*, falls $(x_1, y), (x_2, y) \in F \longrightarrow x_1 = x_2$,
$\ldots$ *mehrdeutig umkehrbar* sonst.
F heißt *eineindeutig*, falls F eindeutig <u>und</u> eindeutig umkehrbar ist.

Zusätze.
1. F ist eindeutig genau dann, wenn $\forall x \in \mathcal{D}(F)\ \exists!\, y \in \mathcal{W}(F) : (x, y) \in F$,
F ist eindeutig umkehrbar genau dann, wenn $\forall y \in \mathcal{W}(F)\ \exists!\, x \in \mathcal{D}(F) : (x, y) \in F$.
2. Ist F eindeutig, so schreibt man anstatt $(x, y) \in F$ auch $y = F(x)$. Sind F, G eindeutig, so ist in der neuen Schreibweise $(G \circ F)(x) = G(F(x))$.

Beispiele.



Definition 7. Eine *Abbildung* $F : M \longrightarrow N$, $x \mapsto y$ ist eine eindeutige Korrespondenz von M in N. Eine Abbildung heißt *injektiv* oder eine *Injektion*, falls sie eindeutig umkehrbar ist,
… *surjektiv* oder eine *Surjektion*, falls sie auf N ist,
… *bijektiv* oder eine *Bijektion*, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bemerkungen.
1. Eine Injektion ist eindeutig (weil jede Abbildung eindeutig ist) und eindeutig umkehrbar, also sogar eineindeutig.
2. Man verwendet, nach Bourbaki, zwei verschiedene *Abbildungspfeile*: $\longrightarrow$ für Mengen und $\mapsto$ für Elemente.

Spezialfälle.
1. Für $M \neq \emptyset$ heißt $id = id_M := \{(x,x)|x \in M\}$ die *identische Abbildung* von M auf sich. $F = id$ genügt $x = F(x)$.
2. Für $M, N \neq \emptyset$ und festes $c \in N$ heißt $F = \{(x,c)|x \in M\}$ eine *konstante Abbildung*. Man schreibt dann $F(x) = const = c$.
3. Die sogenannten *Projektionen* von der Produktmenge $M_1 \times M_2$ auf die Faktoren

$$pr_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1, \ \ (x_1, x_2) \mapsto x_1,$$
$$pr_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2, \ \ (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

sind Surjektionen.
4. Die sogenannten *Einbettungen* der Faktoren M_1, M_2 in die Produktmenge $M_1 \times M_2$

$$i_1 : M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2, \ \ x_1 \mapsto (x_1, c_2) \text{ mit festem } c_2 \in M_2,$$
$$i_2 : M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2, \ \ x_2 \mapsto (c_1, x_2) \text{ mit festem } c_1 \in M_1$$

sind Injektionen.

Satz 4. *Die Komposition von* $\begin{cases} \textit{Abbildungen} \\ \textit{Injektionen} \\ \textit{Surjektionen} \\ \textit{Bijektionen} \end{cases}$ *ist wieder eine* $\begin{cases} \textit{Abbildung} \\ \textit{Injektion} \\ \textit{Surjektion} \\ \textit{Bijektion} \end{cases}$.
Das Inverse einer Bijektion ist wieder eine Bijektion.

Beweis. Übung.

Definition 8. Die Menge aller Abbildungen $F : M \longrightarrow N$ wird mit N^M bezeichnet.

Beispiele.
1. Eine *reelle Zahlenfolge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Also ist
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ = Menge aller reellen Zahlenfolgen.
2. Eine *reelle Funktion* f mit Definitionsbereich $[a, b]$ ist eine Abbildung $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
$x \mapsto y = f(x)$. Also ist
$\mathbb{R}^{[a,b]}$ = Menge aller reellen Funktionen mit Definitionsbereich $[a, b]$.

Geschichte. Ein intuitives Verständnis von Korrespondenzen und Abbildungen hat es schon sehr lange gegeben. Die obige Definition des *geordneten Paares*, welche die mengentheoretische präzise Bestimmung von Korrespondenzen und Abbildungen ermöglicht, stammt von K. Kuratowski (1896–1980). "*Abbildungen*" hießen früher auch "*Funktionen*". Die moderne Terminologie wurde vor allem durch das Lehrbuch der Autorengruppe N. Bourbaki (ab 1939) eingeführt bzw. befestigt.

2.4 Operationen und Relationen

Vorläufige Definition. Eine *(zweistellige) Operation* O erzeugt aus zwei Elementen x, y ein Element $z = xOy$. Eine *n–stellige Operation* erzeugt aus n Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ein Element z.
Eine *(zweistellige) Relation* R ist eine Beziehung zwischen zwei Elementen x, y; man schreibt xRy. Eine *n–stellige Relation* ist eine Beziehung zwischen n Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definition 1. Eine *(zweistellige) Operation* in einer Menge $E \neq \emptyset$ ist eine Abbildung $O : E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \mapsto z = O(x, y) \equiv xOy$. Eine *n–stellige Operation* in $E \neq \emptyset$ ist eine Abbildung $O : E^n \longrightarrow E$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto z = O(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Insbesondere ist eine *einstellige Operation* O eine Abbildung $E \longrightarrow E$, $x \mapsto z = O(x)$.

Beispiele.

Menge $E \neq \emptyset$	Operation in E
Menge der Terme der Aussagenlogik	$\neg, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$
2^M für eine beliebige Menge M	$\cap, \cup, \setminus$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$+, \cdot$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$-$
$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$:$

Definition 2. Eine *(zweistellige) Relation* in einer Menge $E \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge $R \subseteq E \times E$. Für $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy. Eine *n–stellige Relation* in $E \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge $R \subseteq E^n$.

Bemerkung. $R \subseteq E \times E$ enthält genau die (x, y), für welche x, y anschaulich in der Beziehung R zueinander stehen.

Beispiele.

Menge $E \neq \emptyset$	Relation in E
beliebig	Gleichheit $=$
Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	natürliche Ordnungsrelationen $\leq, <, \geq, >$

Definition 3. Eigenschaften einer Relation $R \subseteq E \times E$

R heißt …	… falls $\forall x, y, z \in E$:
reflexiv	xRx
irreflexiv	$\neg xRx$
transitiv	xRy und $yRz \longrightarrow xRz$
symmetrisch	$xRy \longrightarrow yRx$
antisymmetrisch	xRy und $yRx \longrightarrow x = y$
linear	xRy oder yRx
konnex	xRy oder yRx oder $x = y$

R heißt …	… falls R …
reflexive Halbordnung	reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
irreflexive Halbordnung	irreflexiv und transitiv ist.
reflexive Ordnung	lineare reflexive Halbordnung ist.
irreflexive Ordnung	konnexe irreflexive Halbordnung ist.

Beispiele.

Menge $E \neq \emptyset$		reflexiv	irreflexiv
2^M	Halbordnung	$\subseteq, \supseteq$	$\subset, \supset$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Ordnung	$\leq, \geq$	$<, >$

Definition 4. Sei $E \neq \emptyset$, $\leq$ eine reflexive Halbordnung in E, $M \subseteq E$.

Besonderes Element von E	Definierende Eigenschaft(en)
$\overline{s}$ ist *obere Schranke* von M	$\forall x \in M : x \leq \overline{s}$
$\underline{s}$ ist *untere Schranke* von M	$\forall x \in M : x \geq \underline{s}$
$\overline{g} \equiv \sup M$ ist *obere Grenze* oder *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von M	1. $\overline{g}$ ist obere Schranke von M und 2. $\overline{g} \leq \overline{s}$ für jede obere Schranke $\overline{s}$ von M
$\underline{g} \equiv \inf M$ ist *untere Grenze* oder *Infimum* oder *größte untere Schranke* von M	1. $\underline{g}$ ist untere Schranke von M und 2. $\underline{g} \geq \underline{s}$ für jede untere Schranke $\underline{s}$ von M
$\overline{m} \equiv \max M$ ist *größtes Element* oder *Maximum* von M	1. $\overline{m}$ ist obere Schranke von M und 2. $\overline{m} \in M$
$\underline{m} \equiv \min M$ ist *kleinstes Element* oder *Minimum* von M	1. $\underline{m}$ ist untere Schranke von M und 2. $\underline{m} \in M$

M heißt *nach oben beschränkt*, falls M eine obere Schranke besitzt, ... *nach unten beschränkt*, falls M eine untere Schranke besitzt, ... *beschränkt*, falls M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Diskussion von $\overline{g} = \sup M$:

1. bedeutet $\forall x \in M : x \leq \overline{g}$

2. bedeutet $\forall x \in M : x \leq s \longrightarrow \overline{g} \leq s$

Kontraposition von 2. lautet: $s < \overline{g} \longrightarrow \exists x \in M : x > s$.

Diskussion von $\underline{g} = \inf M$:

1. bedeutet $\forall x \in M : x \geq \underline{g}$

2. bedeutet $\forall x \in M : x \geq s \longrightarrow \underline{g} \geq s$

Kontraposition von 2. lautet: $s > \underline{g} \longrightarrow \exists x \in M : x < s$.

Satz 1.

1. *Es gibt jeweils höchstens ein (d. h. ein oder kein)* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$.

2. *Existiert* $\max M$, *so existiert auch* $\sup M$ *und es ist dann* $\max M = \sup M$; *existiert* $\min M$, *so existiert auch* $\inf M$ *und es ist dann* $\min M = \inf M$.

3. *Es gilt* $\sup M = \min\{\overline{s} | \overline{s} \text{ ist obere Schranke von } M\}$,

$\inf M = \max\{\underline{s} | \underline{s} \text{ ist untere Schranke von } M\}$.

Beweis. Übung.

Beispiele.

Sei $\leq$ die natürliche reflexive Ordnung in $\mathbb{R}$, M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ wie angegeben:

M	$\sup M$	$\inf M$	$\max M$	$\min M$
$\{0\}$	0	0	0	0
$\{1, 2, \dots, n\}$	n	1	n	1
$\mathbb{N}$	/	1	/	1
$[a, b]$	b	a	b	a
$]a, b[$	b	a	/	/
$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	/	0	/	/
$\mathbb{R}$	/	/	/	/

/ bedeutet hier: Ein solches Element existiert nicht.

Definition 5. Eine *Äquivalenzrelation* $\sim$ in einer Menge $E \neq \emptyset$ ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation in E. D. h. $\forall x, y, z \in E$:

$x \sim x$,

$x \sim y$ und $y \sim z \longrightarrow x \sim z$,

$x \sim y \longrightarrow y \sim x$.

Bemerkung. $x \sim y$ liest man: *x ist äquivalent (zu) y*. Oft sagt man auch anstelle von *äquivalent*: *ähnlich, gleichartig, vom gleichen Typ*, ...

Beispiele.

Menge $E \neq \emptyset$	Äquivalenzrelation in E
beliebig	Gleichheit $=$
Menge der Terme der Aussagenlogik	logische Äquivalenz $\Longleftrightarrow$
Menge der geometrischen Figuren	Kongruenz $\cong$ in der Geometrie (Zwei Figuren heißen *kongruent*, $F_1 \cong F_2$, falls es eine Bewegung gibt, welche F_1 in F_2 transformiert.)

Definition 6. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in E. Die Teilmenge von E

$$[x] := \{y \in E \mid x \sim y\}$$

heißt die *Äquivalenzklasse von $x \in E$*.

Satz 2. *Es gilt $[x] = [y]$ genau dann, wenn $x \sim y$.*

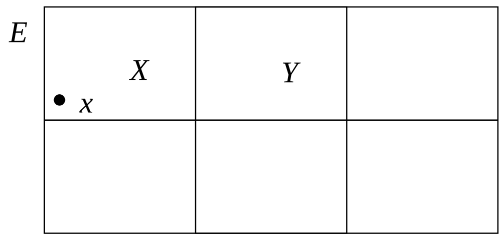
Beweis. ($\longrightarrow$) $[x] = [y] \implies y \in [x] \implies x \sim y$.
($\longleftarrow$) Sei $x \sim y$. $z \in [x] \implies z \sim x \sim y \implies z \sim y \implies z \in [y]$. Also $[x] \subseteq [y]$. Analog $[y] \subseteq [x]$. Zusammen $[x] = [y]$.

Definition 7. Eine *Zerlegung* oder *Partition* einer Menge $E \neq \emptyset$ ist eine Menge $\mathfrak{P}$ von Teilmengen $X, Y, \dots \subseteq E$, genannt *Klassen*, so daß

1. $\emptyset \notin \mathfrak{P}$. D. h. $\emptyset$ ist keine Klasse.
2. $\forall X, Y \in \mathfrak{P} : X \cap Y = \emptyset$ oder $X = Y$. D. h. die Klassen sind paarweise disjunkt.
3. $\bigcup \mathfrak{P} = E$, wobei $\bigcup \mathfrak{P} :=$ Vereinigung aller Klassen $X \in \mathfrak{P}$. D. h. jedes $x \in E$ ist in einer Klasse X enthalten.

Ein $x \in X$ heißt ein *Repräsentant* der Klasse $X \in \mathfrak{P}$.

Mengendiagramm.



Bemerkungen. Logisch äquivalent zu 2. ist $X \cap Y \neq \emptyset \longrightarrow X = Y$.
Für 3. sagt man auch: Die Zerlegung $\mathfrak{P}$ überdeckt E.

Beispiele.

Menge E	Zerlegung $\mathfrak{P}$
Menge aller Schüler $x, y, \dots$ einer Schule	Menge der *Klassen* $X, Y, \dots$ im üblichen Sinn
$\mathbb{R}$	Menge der Invervalle $[n, n+1[$ mit $n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	Menge der *Restklassen* $[0], [1], \dots [n-1]$ *modulo* einer festen Zahl $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $[r] := \{kn + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für $r = 0, 1, \dots, n-1$ r heißt der *Rest* bei Division von $m = kn + r$ durch n.

Satz 3. *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation in E, so ist die Menge der Äquivalenzklassen, genannt* Faktormenge*,*

$$\mathfrak{P} = E/_{\sim} := \{[x] \mid x \in E\}$$

eine Zerlegung von E.

Beweis.
1. Jede Klasse ist $\neq \emptyset$, denn $x \in [x]$.
2. $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Longrightarrow \exists z \in [x] \cap [y] \Longrightarrow \exists z : z \in [x] \wedge z \in [y] \Longrightarrow \exists z : x \sim z \wedge z \sim y$
$\Longrightarrow x \sim y \Longrightarrow [x] = [y]$

3. Die Klassen überdecken E, denn jedes x ist in einer Klasse, nämlich $[x]$, enthalten.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{P}$ eine Zerlegung von E, so ist die durch*

$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow\ \exists X \in \mathfrak{P} : x, y \in X$$

definierte Relation $\sim$, genannt Klassengleichheit*, eine Äquivalenzrelation in E.*

Beweis.
1. Reflexivität: $x \sim x$, da x in der Klasse von x liegt.
2. Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z$ bedeutet $\exists X \in \mathfrak{P} : x, y \in X$ und $\exists Y : \mathfrak{P} : y, z \in Y$. Da $y \in X \cap Y \neq \emptyset$ muß $X = Y$ gelten. Aus $x, z \in X$ folgt $x \sim z$.
3. Symmetrie: $x \sim y \Longrightarrow x$ liegt in der Klasse von $y \Longrightarrow y$ liegt in der Klasse von $x \Longrightarrow y \sim x$.

Satz 5. Hauptsatz über Äquivalenzrelationen:
Äquivalenzrelationen $\sim$ in E und Zerlegungen $\mathfrak{P}$ von E entsprechen einander eineindeutig vermöge

$$\mathfrak{P} := E/_{\sim} :\equiv \{[x] | x \in E\} \quad \textit{mit} \quad [x] := \{y \in E | x \sim y\}$$

und

$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow\ \exists X \in \mathfrak{P} : x, y \in X.$$

Zum **Beweis** wäre noch zu zeigen: Die Zuordnungen

Äquivalenzrelation $\sim\ \mapsto$ Faktormenge $\mathfrak{P} = E/_{\sim}$

Zerlegung $\mathfrak{P} \mapsto$ Klassengleichheit $\sim$.

sind Umkehrungen voneinander.

Beispiel.
$E =$ Menge konkreter Dinge, $\sim =$ Gleichfarbigkeit. Dann ist

$[x] =$ Farbe von $x \equiv \{y \in E \mid y$ gleichfarbig zu $x\}$,

$\mathfrak{P} = E/_{\sim} = \{$ Rot, Grün, Blau, $\dots \} =$ Menge der Farben.

2.5 "Größenvergleich" von Mengen

Idee. Zwei Mengen X, Y sind *gleichmächtig*, d. h. haben im anschaulichen Sinn *gleichviele Elemente*, falls man jedem $x \in M$ bijektiv ein $y \in N$ zuordnen kann.

M ist *mächtiger als* N, d. h. M hat im anschaulichen Sinn *mehr Elemente* als N, falls nicht M aber eine echte Teilmenge M_1 von M gleichmächtig zu N ist.

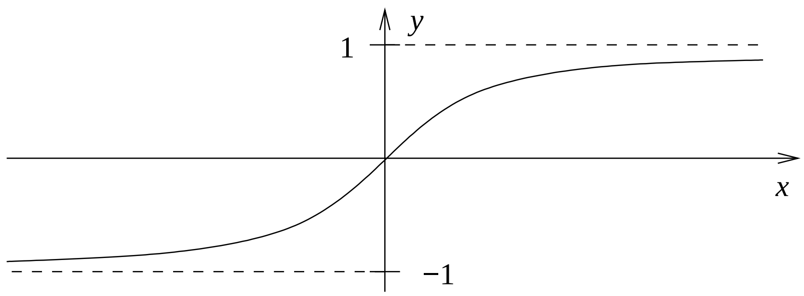
Definition 1. Eine Menge M ist *gleichmächtig zu* einer Menge N, $M \sim N$, falls es eine Bijektion $F : M \longrightarrow N$ gibt. M ist *mächtiger als* N, $M > N$, oder auch $N < M$, falls nicht $M \sim N$, aber ein $M_1 \subset M$ mit $M_1 \sim N$ existiert.

Beispiele.

1. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ vermöge der Bijektion

$$\begin{array}{rccccccccl} \mathbb{Z} = \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N} = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots\} \end{array}$$

2. $\mathbb{R} \sim]-1,1[$ vermöge der Bijektion $x \mapsto y = \tanh x$



Satz 1. Eigenschaften der Gleichmächtigkeit:

1. Reflexivität: $M \sim M$,

2. Transitivität: $M \sim N$ *und* $N \sim L \longrightarrow M \sim L$,

3. Symmetrie: $M \sim N \longrightarrow N \sim M$

Folgerung. In jedem nichtleeren Mengensystem (d. h. Menge von Mengen) ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

1. Die identische Abbildung $M \longrightarrow M$, $x \mapsto x$ ist eine Bijektion also $M \sim M$.

2. $M \sim N$ und $N \sim L \implies \exists$ Bijektion $F : M \longrightarrow N$ und $\exists$ Bijektion $G : N \longrightarrow L$
$\implies \exists F, G : G \circ F$ ist Bijektion $M \longrightarrow L \implies M \sim L$.

3. $M \sim N \implies \exists$ Bijektion $F : M \longrightarrow N \implies \exists F : F^{-1}$ ist Bijektion $N \longrightarrow M$
$\implies N \sim M$.

Satz 2. Eigenschaften der Relation $<$ zwischen Mengen:

Irreflexivität: nicht $M < M$,

Transitivität: $M < N$ *und* $N < L \longrightarrow M < L$.

Folgerung. In jedem nichtleeren Mengensystem ist $<$ eine irreflexive Halbordnung.

Satz 3. *Für jede Menge* M *ist die Potenzmenge von* M *mächtiger als* M *selbst:* $M < 2^M$.

Indirekter Beweis. Angenommen $M \sim 2^M \implies \exists$ Bijektion $F : M \longrightarrow 2^M$, $x \mapsto F(x)$. Betrachten dann $M_0 := \{x \in M | x \notin F(x)\}$ und $x_0 := F^{-1}(M_0)$.

Die Annahme $x_0 \in M_0$ führt auf $x_0 \notin F(x_0) = M_0$. Die entgegengesetzte Annahme $x_0 \notin M_0$ führt auf $x_0 \in F(x_0) = M_0$. Da sich in jedem Fall ein Widerspruch ergibt, gilt nicht $M \sim 2^M$. Es ist aber $M \sim P := \{\{x\} \mid x \in M\} \subset 2^M$.

Folgerung. Zu jeder Menge M gibt es Mengen größerer Mächtigkeit.

Definition 2. Eine Menge M heißt *unendlich*, falls sie zu einer ihrer echten Teilmengen M_1 gleichmächtig ist, d. h. $M_1 \subset M$ und $M_1 \sim M$, *endlich* sonst.

Beispiele. $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$, $\ldots$ sind endliche Mengen.

Die Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind unendliche Mengen. Beispielsweise ist

$\mathbb{N} \sim \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ vermöge $n \mapsto 2n$,

$\mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ vermöge $x \mapsto e^x$.

Geschichte. Die Begriffe *"gleichmächtig"* und *"mächtiger als"* waren zunächst die wichtigsten Innovationen in CANTOR's Mengenlehre (ab 1874). Er führte auch die *"Mächtigkeit"* als Verallgemeinerung der *Elementeanzahl* auf beliebig große Mengen ein. Die Mächtigkeiten heißen auch *Kardinalzahlen* und man kann mit ihnen rechnen. Die obige Definition einer unendlichen bzw. endlichen Menge stammt von R. DEDEKIND (1887).

3 Arithmetik (= Zahlenlehre)

3.1 Natürliche Zahlen

Idee. 1 = Klasse aller Einermengen $\{a\}$,
2 = Klasse aller echten Zweiermengen $\{a,b\}$,
3 = Klasse aller echten Dreiermengen $\{a,b,c\}$ usw..

Definition 1. Konstruktive Definition von $\mathbb{N}$:

Eine *natürliche Zahl* ist eine Äquivalenzklasse im System E der nichtleeren endlichen Mengen bezüglich der Gleichmächtigkeit $\sim$, d. h. ein Element von $\mathbb{N} := E/_\sim$. Man setzt

$|M| :=$ Äquivalenzklasse von $M \in E$ bezüglich $\sim$.

$|M|$ heißt auch *Elementeanzahl* von M.

Beispiele.

$1 = |\{a\}|$,

$2 = |\{a,b\}|$ falls $a \neq b$,

$3 = |\{a,b,c\}|$ falls $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ usw..

Definition 2. Arithmetik zur konstruktiven Definition von $\mathbb{N}$:
Für nichtleere endliche Mengen M, N setzt man

$|M| + |N| := |M \cup N|$, wenn $M \cap N = \emptyset$,
$|M| \cdot |N| := |M \times N|$,
$|M| < |N| :\Longleftrightarrow M < N$ (d. h. N ist mächtiger als M).

Bemerkung. Zur Rechtfertigung dieser Definition ist zu zeigen, daß $|M \cup N|$, $|M \times N|$ sowie die Gültigkeit von $M < N$ nur von $|M|$, $|N|$ und nicht von der Wahl der Repräsentanten M, N abhängen.

Definition 3. Eine unendliche Menge M heißt *abzählbar*, falls $M \sim \mathbb{N}$ gilt, *überabzählbar* sonst.

Folgerung. Klassifikation aller Mengen:

- Menge
  - endlich
  - unendlich
    - abzählbar
    - überabzählbar

höchstens abzählbar

Bemerkung. M ist genau dann abzählbar, falls sich alle Elemente von M als eine unendliche Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit paarweise verschiedenen Gliedern, d. h. $x_n \neq x_m$ für $n \neq m$, anordnen lassen. Denn eine solche Folge ist eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow M$, $n \mapsto x_n$; deren Existenz bedeutet $\mathbb{N} \sim M$. Dann ist auch $M \sim \mathbb{N}$.

Definition 4. Axiomatische Definition von $\mathbb{N}$ (nach G. Peano 1891):

I. 1 ist eine natürliche Zahl. $1 \in \mathbb{N}$.
II. Jede natürliche Zahl n hat <u>genau</u> einen Nachfolger n'.
$\forall n \; \exists! m : n' = m$.
III. Jede natürliche Zahl hat höchstens einen Vorgänger.
$\forall n, m : n' = m' \longrightarrow n = m$.
IV. 1 hat keinen Vorgänger.
$\neg \exists n : n' = 1$.
V. *Induktionsaxiom*: Enthält $M \subseteq \mathbb{N}$ die 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch den Nachfolger n', so ist $M = \mathbb{N}$.
$\forall M (M \subseteq \mathbb{N} \wedge 1 \in M \wedge (n \in M \longrightarrow n' \in M) \longrightarrow M = \mathbb{N})$.

Satz 1. Prinzip des Beweisens durch vollständige Induktion:
Sei A ein Prädikat natürlicher Zahlen. Aus $A(1)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \longrightarrow A(n')$ folgt

$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Beweis. $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n)\}$ erfüllt nach Voraussetzung das Induktionsaxiom
$\implies M = \mathbb{N} \implies$ Behauptung $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Bemerkung. In Satz 1 heißt $A(1)$ *Induktionsanfang*, $A(n)$ *Induktionsvoraussetzung*, $A(n')$ *Induktionsbehauptung*, der Beweis von $A(n) \longrightarrow A(n')$ *Induktionsschritt*.

Satz 2. Prinzip der rekursiven Definition:
Zu einer Menge $M \neq \emptyset$, einem Anfangselement $a \in M$ *und einer Abbildung $F : M \longrightarrow M$ gibt es genau eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow M$, $n \mapsto x_n$ mit*
$x_1 = a$ und $x_{n'} = F(x_n)$.

Anschaulicher Beweis. Definieren Prädikat A durch $A(n) :\iff x_n$ ist eindeutig berechenbar. $A(1)$ ist wahr, denn $x_1 = a$. $A(n) \longrightarrow A(n')$ ist wahr, denn $x_{n'} = F(x_n)$. Nach Satz 1 gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Bemerkung. In Satz 2 heißt $x_1 = a$ *Rekursionsanfang*, $x_{n'} = F(x_n)$ *Rekursionsschritt*.

Definition 5. Arithmetik zur axiomatischen Definition von $\mathbb{N}$.
Addition $+$, *Multiplikation* $\cdot$ und *Potenzieren* werden wie folgt rekursiv definiert. Dabei sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig.

Operation in $\mathbb{N}$	Rekursionsanfang	Rekursionsschritt
Addition $m+n$	$m + 1 := m'$	$m + n' := (m + n)'$
Multiplikation $m \cdot n$	$m \cdot 1 := m$	$m \cdot n' := mn + m$
Potenzieren m^n	$m^1 := m$	$m^{n'} := m^n \cdot m$

Die *Kleiner–Relation* $<$ und die *Teilbarkeit* $|$ werden mittels $+$ bzw. $\cdot$ definiert.
m ist *kleiner als* n, $m < n$, falls $\exists l : m + l = n$. m *teilt* n, $m|n$, falls $\exists l : m \cdot l = n$.

Geschichte. Schon das vorwissenschaftliche Denken geht mit natürlichen Zahlen um. Die Fähigkeit dazu ist dem Menschen angeboren. Die oben angegebenen üblichen Axiome der natürlichen Zahlen stammen von Guiseppe Peano (1891), mit Richard Dedekind (1888) und Hermann Grassmann (1861) als Vorläufer. Alle drei Autoren behandelten das Prinzip der vollständigen Induktion.

3.2 Ganze und rationale Zahlen

Idee. *Ganze Zahl*
:= Differenz $m - n$ natürlicher Zahlen m, n

:≡ Äquivalenzklasse von Zahlenpaaren (m, n) bezüglich der *Differenzengleichheit* $\sim$, definiert durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \;:\iff\; m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

Definition 1. Konstruktive Definition von $\mathbb{Z}$:
Eine *ganze Zahl* ist eine Äquivalenzklasse in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bezüglich der durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \;:\iff\; m_1 + n_2 = m_2 + n_1$$

definierten Äquivalenzrelation $\sim$; d. h. ein Element von $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$. Die Äquivalenzklasse von (m, n) heißt auch *Differenz* $m - n$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(n + 1) - 1 \in \mathbb{Z}$ identifiziert und so eine Einbettung $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ definiert.

Definition 2. Arithmetik zur konstruktiven Definition von $\mathbb{Z}$:
Für $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ setzt man

$$(m - n) + (k - l) := (m + k) - (n + l),$$
$$(m - n) \cdot (k - l) := (mk + nl) - (ml + nk),$$
$$m - n \leq k - l \;:\iff\; m + l \leq k + n.$$

Bemerkung. Zur Rechtfertigung dieser Definition ist zu zeigen, daß die Ausdrücke nur von $m - n$, $k - l$ und nicht von der Wahl der Repräsentanten (m, n), (k, l) abhängen.

Definition 3. Axiomatische Definition von $\mathbb{Z}$:

I. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein *kommutativer Ring* mit Einselement 1. D. h. es gelten
   Axiome der Addition:
   Kommutativgesetz: $m + n = n + m$,
   Assoziativgesetz: $(m + n) + l = m + (n + l)$,
   Existenz der Null: $\exists 0 \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{Z} : n + 0 = 0 + n = n$,
   Existenz der entgegengesetzten Zahl: $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists -n \in \mathbb{Z} : n + (-n) = (-n) + n = 0$.
   Axiome der Multiplikation:
   Kommutativgesetz: $m \cdot n = n \cdot m$,
   Assoziativgesetz: $(m \cdot n) \cdot l = m \cdot (n \cdot l)$,
   Distributivgesetz: $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$,
   Einselement: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$, $1 \neq 0$.

II. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist der kleinste kommutative Ring mit Einselement 1, der $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ enthält.
   D. h. jeder kommutative Ring mit 1, der $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ enthält, enthält auch $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Definition 4. $m - n := m + (-n), \qquad n < m :\iff m - n \in \mathbb{N}.$

Bemerkung. Oft kürzt man ab $mn := m \cdot n$.

Idee. *Rationale Zahl*

:= Quotient $\frac{m}{n}$ ganzer Zahlen m, n mit $n \neq 0$

:≡ Äquivalenzklasse von Zahlenpaaren (m, n) bezüglich der *Quotientengleichheit* $\sim$, definiert durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff \tfrac{m_1}{n_1} = \tfrac{m_2}{n_2} \;:\iff\; m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Definition 5. Konstruktive Definition von $\mathbb{Q}$:
Eine *rationale Zahl* ist eine Äquivalenzklasse in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ bezüglich der durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) :\iff m_1 n_2 = m_2 n_1$$

definierten Äquivalenzrelation $\sim$, d. h. ein Element von $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/_\sim$. Die Äquivalenzklasse von (m, n) heißt auch *Quotient* $\frac{m}{n}$. Es sei $n \in Z$ mit $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$ identifiziert und so eine Einbettung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ definiert.

Definition 6. Arithmetik zur konstruktiven Definition von $\mathbb{Q}$:
Für $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n, l \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} + \frac{k}{l} \quad &:= \quad \frac{ml + kn}{nl}, \\ \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} \quad &:= \quad \frac{mk}{nl}, \\ \frac{m}{n} \leq \frac{k}{l} \quad &:\iff \quad ml \leq kn. \end{aligned}$$

Bemerkung. Auch diese Definition ist zu rechtfertigen.

Definition 7. Axiomatische Definition von $\mathbb{Q}$:

I. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein *geordneter Körper*. D. h. es gelten
   Axiome der Addition:
   Kommutativgesetz: $a + b = b + a$,
   Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
   Existenz der Null: $\exists 0 \in \mathbb{Q}\, \forall a \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$,
   Existenz der entgegengesetzten Zahl: $\forall a \in \mathbb{Q}\, \exists -a \in \mathbb{Q} : a + (-a) = (-a) + a = 0$.
   Axiome der Multiplikation:
   Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$,
   Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
   Einselement: $\exists 1 \in \mathbb{Q}\, \forall a \in \mathbb{Q} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $1 \neq 0$,
   Existenz der reziproken Zahl: $\forall a \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} : a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$,
   Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

<u>Axiome der Anordnung:</u>
Reflexivität: $a \leq a$,
Transitivität: $a \leq b$ und $b \leq c \longrightarrow a \leq c$,
Antisymmetrie: $a \leq b$ und $b \leq a \longrightarrow a = b$,
Linearität: $a \leq b$ oder $b \leq a$,
Monotonie von $+$: $a \leq b \longrightarrow a + c \leq b + c$,
Monotonie von $\cdot$: $a \leq b$ und $0 \leq c \longrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$.

II. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist der kleinste Körper, der $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ enthält. D. h. jeder Körper, der $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ enthält, enthält auch $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Definition 8. $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$ für $b \neq 0$,
$a < b :\Longleftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$, $a \geq b :\Longleftrightarrow b \leq a$, $a > b :\Longleftrightarrow a \geq b$ und $a \neq b$.

Satz 1. $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abzählbar.*

Beweis.
1. Die Elemente von $\mathbb{Z}$ lassen sich zu einer unendlichen Folge anordnen: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$.
2. Alle positiven rationalen Zahlen, also alle Elemente von $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ lassen sich folgendermaßen zu einer unendlichen Folge anordnen:
• Man arrangiere die Brüche wie eine unendliche Matrix:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \ldots \\ \frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \ldots \\ \frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \ldots \end{array}$$

• Man numeriere die Matrixelemente in der Reihenfolge

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 4 & & 7 \;\ldots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ 3 & & 5 & & 8 \;\ldots & & \\ & \swarrow & & \swarrow & & & \\ 6 & & 9 \;\ldots & & & & \\ & \swarrow & & & & & \\ 10 \;\ldots & & & & & & \end{array}$$

• Man modifiziere die Numerierung, indem man nicht teilerfremde Brüche $\frac{m}{n}$ überspringt. Auf diese Weise wird $\mathbb{Q}_+$ als Folge angeordnet: $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \ldots$.

Bemerkung. Die Numerierung im obigen Beweis heißt *Abzählung nach Diagonalen* oder *1. Cantorsches Diagonalverfahren.*

Geschichte. Schon die alten Babylonier, Ägypter und Inder rechneten mit ganzen und rationalen Zahlen. H. Grassmann (1809–1877), R. Dedekind (1831–1916) und andere begründeten die moderne Arithmetik der ganzen und rationalen Zahlen. Die oben verwendeten Begriffe *Ring, kommutativer Ring, Körper, geordneter Körper* sind Grundbegriffe der *Allgemeinen Algebra*, welche sich parallel zur Arithmetik im 19. Jahrhundert herausbildete.

3.3 Reelle Zahlen

Definition 1. Axiomatische Definition von $\mathbb{R}$:

I. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein *geordneter Körper*. D. h. es gelten Axiome der Addition, Axiome der Multiplikation, Axiome der Anordnung wörtlich wie für $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$.

II. *Vollständigkeitsaxiom* oder auch *Axiom der oberen Grenze*: Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.
$\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ und $\exists \overline{s} \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq \overline{s} \longrightarrow \sup M$ existiert.

III. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist der kleinste vollständige (d. h. dem Vollständigkeitsaxiom genügende) geordnete Körper, der $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ enthält. D. h. jeder solche Körper enthält auch $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

Definition 2. $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$ für $b \neq 0$,
$a < b :\Longleftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$, $a \geq b :\Longleftrightarrow b \leq a$, $a > b :\Longleftrightarrow a \geq b$ und $a \neq b$.

Satz 1. *Archimedisches "Axiom":*
$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *ist ein archimedischer Körper, d. h.*
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a > 0$, $b > 0$ $\exists n \in \mathbb{N} : na > b$.

Indirekter Beweis. Angenommen, die Behauptung gilt nicht, d. h. $\exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0, \forall n \in \mathbb{N} : na \leq b$. Dann ist das Vollständigkeitsaxiom auf $M := \{na | n \in \mathbb{N}\}$ anwendbar; sei $g := \sup M$. Zum einen ist g eine obere Schranke von M, d. h. $\forall n \in \mathbb{N} : na \leq g$. Zum anderen ist die kleinere Zahl $g - a$ keine obere Schranke von M, d. h. $\exists m \in \mathbb{N} : ma > g - a$, äquivalent $(m + 1)a > g$. Beide Sätze zusammen ergeben einen Widerspruch, wenn man $n = m + 1$ setzt.

Satz 2. *Dichtheit von* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$*:*
Es gibt isomorphe (d. h. strukturerhaltende) Einbettungen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *Dabei ist* $\mathbb{Q}$ dicht *in* $\mathbb{R}$, *d. h. zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen* a, b *liegt stets eine rationale Zahl* r*:*
$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Beweis Übung.

Zusatz. Den Axiomen für das Rechnen mit reellen Zahlen wird noch ein *"Geometrie–Axiom"* hinzugefügt, welches wir hier nur anschaulich beschreiben: Die reellen Zahlen lassen sich durch die Punkte einer beliebig fest gewählten Gerade g Anschauungsraum treu darstellen. D. h. es gibt eine Bijektion $\mathbb{R} \longrightarrow g$, welche "rechnerische" Sachverhalte in $\mathbb{R}$ als geometrische Sachverhalte in g darstellt (und umgekehrt). Wenn $a < b$, so liegt der Punkt zu a links von dem Punkt zu b (und umgekehrt). Dann ist $b - a$ gleich dem Abstand der beiden Punkte auf g.

Geschichte. Die alten Griechen haben nur die rationalen Zahlen als *"Zahlen"* anerkannt. Sie wußten schon, daß jede "Zahl" als die Länge einer Strecke auftritt, aber nicht umgekehrt. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist im anschaulichen Sinn "lückenhaft". Durch Ausfüllen der Lücken gelangt man auf konstruktive Weise zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Diese *"Vervollständigung"* kann auf verschiedene Weise bewerkstelligt werden. Früher benutzte man häufig sogenannte *Dedekindsche Schnitte* (nach R. Dedekind, 1872); heute bevorzugt man das *Axiom der oberen Grenze*. Im Verlauf des Mathematikstudiums werden noch andere Möglichkeiten der Vervollständigung behandelt.

Definition 3. (Wiederholung.)
Betrachten eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$.

Besondere Zahl	Definierende Eigenschaft(en)
$\overline{s}$ ist *obere Schranke* von M	$\forall x \in M : x \leq \overline{s}$
$\underline{s}$ ist *untere Schranke* von M	$\forall x \in M : x \geq \underline{s}$
$\overline{g} \equiv \sup M$ ist *obere Grenze* oder *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von M	1. $\overline{g}$ ist obere Schranke von M und 2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : x > \overline{g} - \varepsilon$
$\underline{g} \equiv \inf M$ ist *untere Grenze* oder *Infimum* oder *größte untere Schranke* von M	1. $\underline{g}$ ist untere Schranke von M und 2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : x < \underline{g} + \varepsilon$
$\overline{m} \equiv \max M$ ist *größtes Element* oder *Maximum* von M	1. $\overline{m}$ ist obere Schranke von M und 2. $\overline{m} \in M$
$\underline{m} \equiv \min M$ ist *kleinstes Element* oder *Minimum* von M	1. $\underline{m}$ ist untere Schranke von M und 2. $\underline{m} \in M$

Beispiele.
1. $M = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ hat $\sup M = \max M = 1$; $\inf M = 0$; $\min M$ existiert nicht.
Beweis von $\inf M = 0$.
1. 0 ist untere Schranke von M.
2. Jede größere Zahl $0 + \varepsilon$ ist nicht mehr untere Schranke: Nämlich $\exists x \in M : x < 0 + \varepsilon \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Solche n existieren nach dem Archimedischen Axiom.

2. $M = \{1 - \frac{1}{2n+1} \;|\; n \in \mathbb{N}\}$ hat $\sup M = 1$; $\max M$ existiert nicht; $\inf M = \min M = \frac{2}{3}$.
Beweis von $\sup M = 1$.

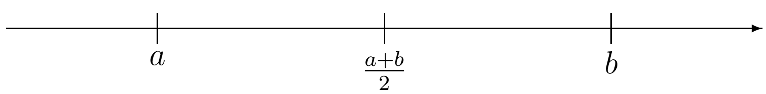
1. $\forall n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{2n+1} < 1 \Longrightarrow 1$ ist obere Schranke von M.
2. Jeder kleinere Zahl $1 - \varepsilon$ ist nicht mehr obere Schranke: Nämlich $1 - \frac{1}{2n+1} > 1 - \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{2n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow 2n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Solche n existieren nach dem Archimedischen Axiom.

Definition 4. "Uneigentlicher" Gebrauch von sup und inf:
Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so setzt man $\sup M = +\infty$. Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt, so setzt man $\inf M = -\infty$.

3.4 Ungleichungen

Satz 1. Elementare Ungleichungen:
Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a < b \longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b,$$



$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

wobei $a^2 := a \cdot a$, $b^2 := b \cdot b$ usw.

Beweis.

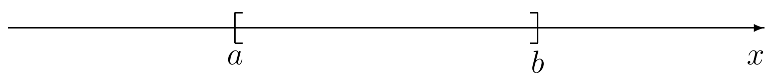
$$a < b \Longrightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2} \left\{ \begin{array}{l} +\frac{a}{2} \\ +\frac{b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < \frac{a+b}{2} \\ \frac{a+b}{2} < b \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

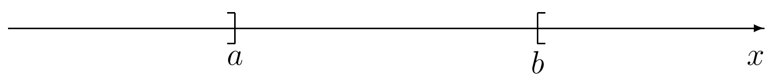
$$\begin{array}{rcccccc} + : (a+b)^2 & \leq & (a+b)^2 + (a-b)^2 & = & 2(a^2+b^2) & & \\ - : (a+b)^2 & \geq & (a+b)^2 - (a-b)^2 & = & 4ab & & \\ \Longrightarrow \quad 4ab & \leq & (a+b)^2 & \leq & 2(a^2+b^2) & \Longrightarrow & \text{Behauptung.} \end{array}$$

Definition 1. *Beschränkte Intervalle* reeller Zahlen:

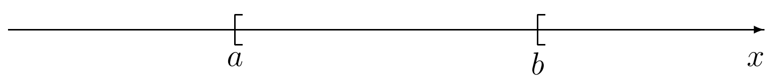
Abgeschlossenes Intervall $\quad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$.



Offenes Intervall $\quad]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.



Halboffene Intervalle $\quad [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$,
$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$.



Unbeschränkte Intervalle reeller Zahlen:

$$\begin{aligned}
&[a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\},\\
&]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} | x > a\},\\
&]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} | x \le b\},\\
&]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} | x < b\},\\
&]-\infty,+\infty[:= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Definition 2.

Der *(Absolut–)Betrag* von x ist $\quad |x| := \begin{cases} x & \text{für } x \ge 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Das *Vorzeichen* oder *Signum* von x ist $\quad \text{sgn x} := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Satz 2. Eigenschaften von $|\ |$ und sgn .

Positive Definitheit: $\quad |x| \ge 0$ *und* $|x| = 0$ *gdw.* $x = 0$,
Dreiecksungleichung: $\quad ||x| - |y|| \le |x+y| \le |x| + |y|$,
Multiplikativität: $\quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
$x = (\text{sgn x}) \cdot |\text{x}|,\ |x| = (\text{sgn x}) \cdot \text{x}$

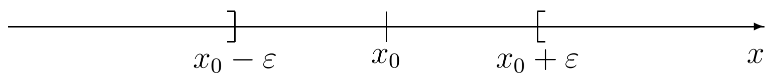
Beweis der Dreiecksungleichung:

	$x \le \|x\|$	$-x \le \|x\|$
	$y \le \|y\|$	$-y \le \|y\|$
addiert	$x + y \le \|x\| + \|y\|$	$-(x+y) \le \|x\| + \|y\|$

Eine der beiden linken Seiten ist $|x+y|$. $\implies$ $|x+y| \le |x| + |y|$.
Weiter

$|x| \equiv |(x+y)-y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$
$\implies \ |x| - |y| \leq |x+y|$.
Analog $|y| - |x| \leq |x+y|$.
Eine der beiden linken Seiten ist $||x| - |y||$.
$\implies \ ||x| - |y|| \leq |x+y|$.

Definition 3. $U_\varepsilon(x_0) :=]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ mit $\varepsilon > 0$ heißt auch ε–*Umgebung von* x_0.



Satz 3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

$x \in U_\varepsilon(x_0)$,
$x_0 \in U_\varepsilon(x)$,
$-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$,
$-\varepsilon < x_0 - x < \varepsilon$,
$|x - x_0| < \varepsilon$.

Dann ist auch $||x| - |x_0|| < \varepsilon$.

Beweis.
$x \in U_\varepsilon(x_0) \equiv]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\iff x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \iff -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \iff x - x_0 < \varepsilon$ und $x_0 - x < \varepsilon \iff |x - x_0| < \varepsilon$.
In der letzten Bedingung können x, x_0 vertauscht werden. Beachte noch $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$.

Definition 4. Grundbegriffe der *Fehlerrechnung*:
Sei x_0 ein (im allgemeinen unbekannter) *exakter Wert*, x ein (im allgemeinen bekannter) *Näherungswert* einer Größe. Man schreibt dann auch $x \approx x_0$.

$x - x_0$ heißt *(absoluter) Fehler*.
$\frac{x - x_0}{x_0}$ im Falle $x_0 \neq 0$ heißt *relativer Fehler*.

Wenn $|x - x_0| \leq \varepsilon$ ist, so heißt ε eine *(absolute) Fehlerschranke*. Man schreibt dann auch $x_0 = x \pm \varepsilon$.

Bemerkungen.
1. Der relative Fehler ist dimensionslos (d. h. eine reine Zahl ohne Maßeinheit) und kann deshalb auch in % oder ‰ angegeben werden.
2. Ist ε eine Fehlerschranke, so ist jede größere Zahl ebenfalls eine Fehlerschranke.

Definition 5. Aufgabe der *Fehlerabschätzung*:

Gegeben. Näherungswerte $x, y, \dots$

Fehlerschranken $\varepsilon, \eta, \dots$, d. h. $|x - x_0| \le \varepsilon$, $|y - y_0| \le \eta$, ...

Funktion f von x oder x, y oder ...

Gesucht. Brauchbare Fehlerschranken für $f(x)$ oder $f(x, y)$ oder ....

Dabei sei noch $|x|, |x_0| > \varepsilon$, $|y|, |y_0| > \eta$, ... angenommen.

Beispiele.

1. Betrachten $f(x) = x^2$.

$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon(|x| + |x_0|) < \varepsilon(2|x| + \varepsilon) = 2\varepsilon|x| + \varepsilon^2$

Hierbei wurde verwendet $|x - x_0| \le \varepsilon$, $|x + x_0| \le |x| + |x_0|$, $|x_0| \le |x| + \varepsilon$.

Der Summand ε^2 kann praktisch vernachlässigt werden.

2. Betrachten $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\frac{xy_0 - x_0y}{yy_0}\right| = \left|\frac{xy_0 - xy + xy - x_0y}{yy_0}\right| = \left|\frac{x(y_0 - y) + (x - x_0)y}{yy_0}\right| \le \frac{|x||y_0 - y| + |x - x_0||y|}{|y||y_0|} \le$

$\le \frac{\eta|x| + \varepsilon|y|}{|y||y_0|} \le \frac{\eta|x| + \varepsilon|y|}{|y|(|y| - \eta)}$.

Praktisch kann hier im Nenner $|y| - \eta$ durch $|y|$ ersetzt werden.

3.5 Summen und Produkte

Definition 1. Eine *(unendliche) Folge* mit Werten in einer Menge $E \neq \emptyset$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow E$, $n \mapsto a_n$. Eine *endliche Folge* mit Werten in E ist eine Abbildung $\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow E$, $k \mapsto a_k$.

Definition 2. Rekursive Definitionen.

Seien $a, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$. Die *Summe*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

ist rekursiv definiert durch

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Ferner sei

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k := \sum_{l=1}^{n-m} a_{l+m}.$$

Das *Produkt*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

ist rekursiv definiert durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}.$$

Ferner sei für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a, \quad a^{-n} := (a^n)^{-1}, \quad \prod_{k=m+1}^{n} a_k := \prod_{l=1}^{n-m} a_{l+m}.$$

Zusatz zu Definition 1. Eine *(unendliche) Doppelfolge* mit Werten in E ist eine Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow E$, $(m,n) \mapsto a_{mn}$. Eine *endliche Doppelfolge* mit Werten in E ist eine Abbildung $\{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow E$, $(k,l) \mapsto a_{kl}$.

Satz 1. Gesetze für $\sum$ und $\prod$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kl}\right) \qquad \prod_{k=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{n} a_{kl}\right) = \prod_{l=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{m} a_{kl}\right)$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{n+m} = a^n a^m$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beweise durch vollständige Induktion.

Beispiele von Summenformeln:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ für } q \neq 1.$$

Beweise durch vollständige Induktion.

Alternativ: Trick von C. F. Gauss (als Schüler!):

$$\text{Für gerades } n: \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= 1 \qquad + 2 \qquad + \dots \quad + \tfrac{n}{2} + \\ &\quad + n \qquad + (n-1) \quad + \dots \quad + \left(\tfrac{n}{2}+1\right) \\ &= (n+1) \quad + (n+1) \quad + \dots \quad + (n+1) \qquad \left(\tfrac{n}{2} - \text{mal}\right) \\ &= \tfrac{n}{2}\,(n+1) \end{aligned}$$

Für ungerades n ist

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k \ + \ n = \frac{n-1}{2} n + n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Trick von Archimedes zur Berechnung von $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ für $q \neq 1$:

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ q s_n & = & \phantom{1 +{}} q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\ \hline \text{Differenz } s_n - q s_n & \equiv & (1-q) s_n \ = \ 1 - q^{n+1} \\ \Longrightarrow \ s_n & = & \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{array}$$

Definition 3. Spezielle Produkte:
n *Fakultät* für $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \equiv 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Zusätzlich ist $0! := 1$.
Der *Binomialkoeffizient* n *über* k für $n, k = 0, 1, 2, \dots$ ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Der *Binomialkoeffizient* x *über* k für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\binom{x}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^{k} (x - l + 1) \equiv \frac{x \cdot (x-1) \cdots (x-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Zusätzlich ist $\binom{x}{0} := 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Die Definitionen von $\binom{n}{k}$, $\binom{x}{k}$, $\binom{x}{0}$ sind miteinander verträglich.

Beispiele.

$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{16}.$

Satz 2. *Es gilt* $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ *und* $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ *für* $n, k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Übung.

Bemerkung. Die Rekursionsgleichung von Satz 2 und die Anfangsbedingung $\binom{n}{0} = 1$ bestimmen zusammen die Binomialkoeffizienten eindeutig. Darauf beruht ein Schema der Binomialkoeffizienten, genannt *Pascalsches Dreieck*:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

Satz 3. Binomischer Lehrsatz.
Für $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *ist*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \equiv a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Der **Beweis** benutzt Satz 2 und vollständige Induktion bezüglich n.

Speziell für $n = 1, 2, 3$ erhält man

$(a+b)^1 = a + b,$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Satz 4. Lagrangesche Identität.

$$\sum_{k,l=1}^{n} (a_k b_l - a_l b_k)^2 = 2 \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} b_l^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \right].$$

Beweis. Man wende $\sum\limits_{k,l=1}^{n}$ auf $\;(a_k b_l - a_l b_k)^2 = a_k^2 b_l^2 + a_l^2 b_k^2 - 2(a_k b_k)(a_l b_l)\;$ an.

Satz 5. Wichtige Ungleichungen:

1. Verallgemeinerte Dreiecksungleichung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

2. Schwarzsche Ungleichung:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

3. Bernoullische Ungleichung:

$$(1+a)^n > 1 + na \quad \textit{für} \quad 1+a > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

1. Durch vollständige Induktion.

2. Aus der Lagrangeschen Identität folgt die zu 2. äquivalente Abschätzung

$$0 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} b_l^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

3. Durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $(1+a)^1 = 1 + 1 \cdot a$ richtig.

Induktionsschritt: $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na) = 1+na+a+na^2 \geq 1+(n+1)a$

Geschichte. Archimedes lebte 287–212 v.u.Z.. Carl Friedrich Gauss lebte 1777–1855. Das *Pascalsche Dreieck* ist nach Blaise Pascal (1623–1662) benannt, die *Bernoullische Ungleichung* nach Jakob I. Bernoulli (1654–1705), die *Schwarzsche Ungleichung* nach Hermann Amandus Schwarz (1843–1921).

3.6 Wurzeln, Potenzen mit rationalem Exponenten

Definition 1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die *n–te Wurzel* aus $a > 0$ ist die Zahl $x =: \sqrt[n]{a}$ mit $x > 0$ und $x^n = a$.

Satz 1. Rechtfertigung von Definition 1: Existenz und Eindeutigkeit der n–ten Wurzel.
$\forall a \in \mathbb{R}$ *mit* $a > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ $x \in \mathbb{R}:$ $x > 0$ *und* $x^n = a$.

Idee. $x = \sup M$ mit $M := \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0 \text{ und } z^n \leq a\}$.

Beweis.

Fall $a \geq 1$: $\quad 1 \leq a \implies 1^n \leq a \implies 1 \in M \implies M \neq \emptyset$.

Wenden auf den Schluß $z > a \implies z^n > a^n \geq a \implies z \notin M$ Kontraposition an und erhalten $z \in M \implies z \leq a$. Das heißt, a ist obere Schranke von M. $\implies x := \sup M$ existiert. Angenommen $x^n > a$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß noch $x - \varepsilon > 0$ und $(x-\varepsilon)^n \geq a$. Probieren: $(x-\varepsilon)^n = x^n\left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)^n \geq x^n\left(1 - n\frac{\varepsilon}{x}\right) \equiv x^n - n\varepsilon x^{n-1} \geq a$? Hierbei wurde die Bernoullische Ungleichung benutzt. Wählen also etwa $\varepsilon < x$ und $\varepsilon \leq \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}$. Nach Definition von $x = \sup M \quad \exists z \in M : z > x - \varepsilon > 0 \implies z^n > (x-\varepsilon)^n \geq a$. Widerspruch zur Definition von M.

Angenommen $x^n < a \iff x'^n > a'$ mit $x' := \frac{1}{x}$, $a' := \frac{1}{a}$. Nach obiger Konstruktion gibt es ein ε' mit $x' - \varepsilon' > 0$ und $(x' - \varepsilon')^n \geq a' \implies x + \varepsilon := (x' - \varepsilon')^{-1}$ definiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x+\varepsilon)^n = (x' - \varepsilon')^{-n} \leq (a')^{-1} = a$. $\implies x + \varepsilon \in M \implies x$ ist nicht obere Schranke von M und damit nicht $\sup M$. Widerspruch!

Also ist $x^n = a$.

Der Fall $0 < a < 1$ wird durch $a' := \frac{1}{a}$, $x' := \frac{1}{x}$, $x'^n = a'^n$ auf den obigen Fall zurückgeführt.

Zeigen noch die Eindeutigkeit: Angenommen $x_1^n = a$, $x_2^n = a$ und etwa $0 < x_1 < x_2 \implies 0 < a = x_1^n < x_2^n = a$. Widerspruch! Also ist $x_1 = x_2$.

Spezialfälle.

$$\sqrt[n]{0} := 0, \qquad \sqrt[1]{a} := a, \qquad \sqrt{a} := \sqrt[2]{a}.$$

Bemerkung. Die Gleichung $x^n = a$ hat folgende Lösungsmenge in den angegebenen Fällen:

	$a > 0$	$a < 0$
n gerade	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	$\emptyset$
n ungerade	$\sqrt[n]{a}$	$-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}$

Satz 2. Wurzelgesetze:

Für $0 < a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}, \qquad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Definition 2. Potenz mit rationalem Exponenten:

Für $0 < a \in \mathbb{R}$, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $a^r := \sqrt[n]{a^m}$.

Rechtfertigung. Die Definition ist unabhängig von der Darstellung von r als Bruch. Wenn nämlich $r = \frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ mit $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n, l \in \mathbb{N}$, so ist $ml = kn \implies \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[l]{(a^m)^l}} = \sqrt[n]{\sqrt[l]{a^{ml}}} = \sqrt[n]{\sqrt[l]{a^{kn}}} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{kn}}} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{(a^k)^n}} = \sqrt[l]{a^k}$.

Satz 3. Potenzgesetze für rationale Exponenten:
Für $0 < a, b \in \mathbb{R}$ *und* $r, s \in \mathbb{Q}$ *ist*

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad (ab)^r = a^r b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r},$$

$$0 < a < b \longrightarrow a^r \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} b^r \text{ je nachdem, ob } r \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} 0,$$

$$r < s \longrightarrow a^r \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} a^s \text{ je nachdem, ob } a \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} 1.$$

Definition 3. *Arithmetisches Mittel A, geometrisches Mittel G, harmonisches Mittel H* von zwei Zahlen $a, b > 0$ sind

$$A := \frac{a+b}{2}, \qquad G := \sqrt{a \cdot b}, \qquad H := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

... von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ sind

$$A := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad G := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}, \qquad H := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Satz 4. *Jeder der Mittelwerte* $M = A, G, H$ *genügt* $\min\limits_{1 \le k \le n} a_k \le M \le \max\limits_{1 \le k \le n} a_k$.
Ferner gilt $H \le G \le A$.

Beweis der letzten Formel für $n = 2$:

Schon gezeigt $\qquad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \implies G = \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = A.$

Weiter $\qquad \frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{1}{G} \implies H \le G.$

Beispiel. Sei $a_n = n$. Dann ist

$$G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k} \equiv \sqrt[n]{n!} \le A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

$$\implies \text{Ungleichung } n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ für } n \ge 2.$$