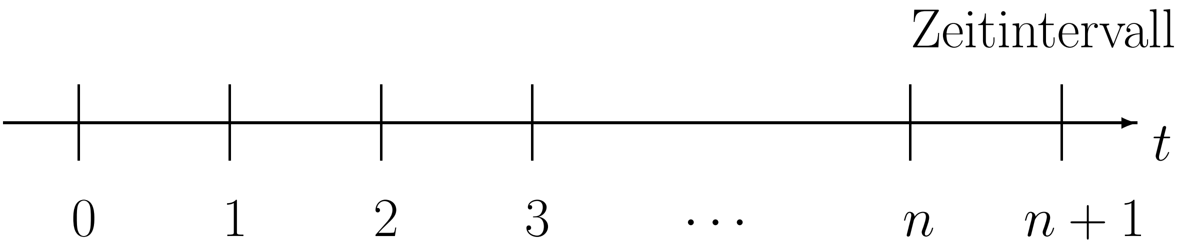
13. Differenzengleichungen

Universelle Bewegungsgleichung für ökonomische Kreisläufe



In aufeinanderfolgenden Zeitintervallen laufen qualitativ gleiche Vorgänge in quantitativ unterschiedlichen Maßstäben ab.

Bestand am Ende des Zeitintervalls $[n, n+1]$
= Bestand am Anfang des Zeitintervalls $[n, n+1]$
+ Zuflüsse – Abflüsse

2. $$\underset{\substack{\text{Kapital}\\ \text{(Bank)}}}{B_{n+1}} = B_n + \underset{\text{Zinsen}}{Z_n} - \underset{\text{Abhebungen}}{a_n}$$

Rückkopplung möglich: $Z_n = f(B_n)$, $a_n = \tilde{f}(B_n)$

3. Beispiel: Entwicklung des Holzvolumens eines Waldes
konstante jährliche Wachstumsrate w
jährlicher Einschlag
Verlust durch Windbruch oder Schädlinge mit konstanter Verlustrate v
Sei H_n Holzbestand (in m^3) am Anfang des Jahres n,
e_n Holzeinschlag (in m^3) während des Jahres n.

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= H_n + w \cdot H_n - vH_n - e_n \\ &= (1 + w - v)H_n - e_n \end{aligned}$$

oder

$$H_{n+1} - H_n = (w - v)H_n - e_n$$

4. Definition: Eine Relation

$$F(n, y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \ldots$$

wird **Differenzengleichung** für die Prozeßgröße y genannt. F ist eine (gegebene) Funktion der Argumente n, $y_{n+k}, \ldots y_n$, d. h. von $(k+2)$ Argumenten. Die Zahl k nennt man die Ordnung der Differenzengleichung.

Die Differenzengleichung heißt **autonom**, wenn n nicht explizit auftritt, **linear**, falls F linear ist, diese homogen oder inhomogen.

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_k(n)y_n \;=\; a(n) \quad \text{inhomogen}$$

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_k(n)y_n \;=\; 0 \quad \text{homogen}$$

5. Definition: Eine Funktion $y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lösung** einer Differenzengleichung, wenn ihre Funktionswerte $y(n) = y_n$ die Differenzengleichung

$$F(n, y_{n+k}, \ldots, y_n) = 0 \quad \forall\, n$$

erfüllen.

Ist ein (sind) Anfangswert(e) bekannt, so rekursive Berechnung.

6. Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung

$$y_n = a(n)y_{n-1} + E(n)$$

Lineare Differenzengleichung 2. Ordnung

$$y_{n+2} = a(n)y_{n+1} + b(n)y_n = E(n)$$

Beispiel: Fibonacci:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \ldots$$

7. Spezialfall $a = const$**,** $E(n) = b$

$$y_{n+1} = ay_n + b \qquad (7.1)$$

$b = 0$, so homogen; $b \neq 0$, so inhomogen.

8. Satz: Zu festen $a, b \in \mathbb{R}$ und jedem Anfangswert c existiert genau eine Lösung der Differenzengleichung (7.1) mit $y_0 = c$. Es gilt

$$y_n = \begin{cases} y_0 + nb & \text{falls } a = 1 \\ & \\ a^n y_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} b & \text{falls } a \neq 1 \end{cases} \qquad (7.2)$$

Beweis: Wir zeigen, daß (y_n) eine Lösung der Differenzengleichung bilden, und daß dies die einzige Lösung ist.

1. Fall: $a = 1$. Dann

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + nb \quad \forall\, n \\ \Longrightarrow y_{n+1} &= y_0 + (n+1)b = y_0 + nb + b \\ &= y_n + b = 1 \cdot y_n + b \end{aligned}$$

Sei umgekehrt (z_n) eine Lösung mit $z_0 = c$ im Fall $a = 1$.

$$\Longrightarrow z_0 = z_0 + 0 \cdot b = c + 0 \cdot b = y_0 + 0 \cdot b$$

Also ist die Formel aus 7.2. erfüllt.
Sei die Formel schon für alle natürlichen Zahlen $n \leq k$ richtig. Wir wollen die Aussage für $n = k+1$ zeigen. Wegen

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= a \cdot z_k + b = 1 \cdot z_k + b \\ &= (y_0 + kb) + b = y_0 + (k+1)b \end{aligned}$$

ist $z_{k+1} = y_{k+1}$ (vollständige Induktion).

2. Fall: $a \neq 1$. Sei

$$y_n = a^n y_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} b; \quad \forall\, n$$

Das ist eine Lösung, denn dann gilt

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= a^{n+1} y_0 + \frac{a^{n+1}-1}{a-1} b \\
&= a \cdot a^n y_0 + \frac{a \cdot a^n - a + a - 1}{a-1} b \\
&= a \cdot a^n y_0 + a \frac{a^n - 1}{a-1} b + \frac{a-1}{a-1} b \\
&= a \left[a^n y_0 + \frac{a^n - 1}{a-1} b \right] + b \\
&= a y_n + b
\end{aligned}$$

Wir zeigen die Eindeutigkeit im Fall $a \neq 1$. Sei dazu (z_n) irgendeine Lösung der Differenzengleichung. Für $n = 0$ ist

$$\begin{aligned}
z_0 = c &= 1 \cdot c + \frac{0}{a-1} b \\
&= a^0 \cdot c + \frac{a^0 - 1}{a-1} b \\
&= a^0 \cdot y_0 + \frac{a^0 - 1}{a-1} b
\end{aligned}$$

oder einfacher

$$z_0 = y_0$$

Jetzt folgt wieder ein Induktionsschritt, bis $n = k$ sei

$$z_n = y_n$$

bereits nachgewiesen.

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= a \cdot z_k + b \\
&= a\left(a^k c + \frac{a^k - 1}{a-1} b\right) + b \\
&= a^{k+1} \cdot c + \frac{a^{k+1} - a}{a-1} b + \frac{a-1}{a-1} b \\
&= a^{k+1} \cdot y_0 + \frac{a^{k+1} - 1}{a-1} b \\
&= y_{k+1}
\end{aligned}$$

9. Anwendungen auf Finanzmathematik

$K = K_n = K(n)$	Kapital zum Zeitpunkt n
p (in %)	Zinsfuß; Zinsen/Jahr bei unveränderter Einlage und jährlicher Zinsgutschrift
$q = 1 + \frac{p}{100}$	Aufzinsfaktor

9.1. Jährlich wird eine feste Rate R zu Beginn der Zinsperiode (jährliche Zinsgutschrift) eingezahlt. Zinsen bleiben auf dem Konto, keine weiteren Kontobewegungen. Startkapital K_0.

$$\Longrightarrow K_{n+1} = q \cdot K_n + q \cdot R$$

Setze $q \neq 1$, also $p \neq 0$ voraus. Nach Satz 7.2 folgt

$$\Longrightarrow K_n = q^n K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} qR$$

9.2. Monatlich wird eine feste Summe S zum 1. des Monats eingezahlt. Zinsgutschrift jährlich. Zinsen bleiben auf dem Konto. Keine weiteren Kontobewegungen.
Achtung: Die Raten S werden anteilsmäßig verzinst, Gutschrift aber erst zum Jahresende.
Summe S vom 1.1. wird ein Jahr verzinst
– Zinsen: $\frac{12}{12}\frac{p}{100}S$
Summe S vom 1.2. wird elf Monate verzinst
– Zinsen: $\frac{11}{12}\frac{p}{100}S$
⋮
Summe vom 1.12. wird einen Monat verzinst
– Zinsen: $\frac{1}{12}\frac{p}{100}S$

Zinsen für ein Jahr (von der laufenden Einzahlung, ohne K_n)

$$\left[\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\cdots+\frac{12}{12}\right]\cdot\frac{p}{100}\cdot S$$

$$=\frac{p}{100}\cdot\frac{S}{12}\cdot[1+2+\cdots+12]$$

$$=\frac{p}{100}\cdot\frac{S}{12}\cdot\frac{12\cdot 13}{2}$$

$$=\frac{6,5\cdot p}{100}\cdot S$$

Damit folgende Kontozuführung am 31.12.:

$$R = 12 \cdot S + \frac{6,5 \cdot p}{100} \cdot S$$

$$\Longrightarrow K_{n+1} = q \cdot K_n + R$$

$$\Longrightarrow K_n = q^n K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} R$$

9.3. Effektivzins einer Hypothek

Bei Aufnahme einer Hypothek wird manchmal nicht der gesamte geliehene Betrag ausgezahlt, sondern nur ein vereinbarter Teil. Dafür sind die Zinsen niedriger.

K	geliehene Summe, die nach m Jahren (Vertragsdauer) zurückzuzahlen ist.
$K_0 = \left(1 - \frac{d}{100}\right) K$	werden nur ausgezahlt
d (in %)	Dissagio
p_0 (in %)	nomineller Zinssatz; jährlich sind $Z = \frac{p_0}{100} \cdot K$ Zinsen zu zahlen.
p (in %)	Effektivzins = Zinsfuß p, bei dem unter Berücksichtigung der jährlichen Zinszahlungen Z aus dem Kapital K_0 das Kapital K angespart wird.

$$K_0 = \left(1 - \frac{d}{100} K\right)$$

$$K_{n+1} = qK_n - Z \qquad n \geq 0$$

$$\text{d.h. } K_n = q^n K_0 - \frac{q^n - 1}{q - 1} Z$$

Forderung: $K_m = K$

$$\Longrightarrow K = q^m \underset{\overset{\uparrow}{\left(1-\frac{d}{100}\right)K}}{K_0} - \frac{q^m - 1}{q-1}\underset{\overset{\uparrow}{\frac{p_0}{100}K}}{Z}$$

$$\Longrightarrow K = \left(1 - \frac{d}{100}\right) K q^m - \frac{q^m - 1}{q-1} K \frac{p_0}{100} \quad / : K$$

also

$$1 = \left(1 - \frac{d}{100}\right) q^m - \frac{q^m - 1}{q-1} \frac{p_0}{100}$$

Komplizierte Gleichung in q, K tritt hier nicht auf.