

Berechnung der Deformation am Beispiel einer Zylinderschale

Peter Nestler

5. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Einführung in die Elastizitätstheorie	3
2.1	Kinematik	3
2.2	Gleichgewichtsbedingungen	4
2.3	Kinematische Grundgleichung für den instationären Fall	5
2.4	Die Piola - Transformation [2]	5
2.5	Lineare Materialgesetze	6
2.6	Ebener Spannungszustand (ESZ) „plain stress“	6
2.7	Die Hypothesen von Mindlin und Reissner	7
3	Lineare Elastizitätstheorie	7
3.1	Das Variationsproblem	7
4	Herleitung der Bilinearform	8
4.1	Krafteinwirkung auf die Zylinderschale	12
4.2	Bilinearform für den stationären Fall	13
4.3	Randbedingungen	13
4.4	Bilinearform für den instationären Fall	16
4.5	Der Spezialfall der „dünnen“ Schale	17
5	Zusammenfassung	18

Abstrakt:

In diesem Preprint geht es um die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie. Diese werden bei der Modellierung der Deformation einer Zylinderschale benötigt. Die Herleitung des Modells wird aus mathematischer Sichtweise geführt. Mit Hilfe der Differentialgeometrie, der Schalentheorie und den Grundgleichungen der Mechanik wird eine Variationsgleichung (ARW-Problem) hergeleitet. Mit dieser Gleichung kann die Auslenkung der Zylinderschale unter dem Einfluss von Kräften (stationär/instationär) berechnet werden. Insbesondere wird bei der Betrachtung einer „dünnen“ Schale auf die resultierende Gleichung eingegangen.

1 Einleitung

Viele praktische Probleme beschäftigen sich mit Deformationen von Körpern, die durch den Einfluß von Kräften entstehen. Praktische Beispiele sind das Durchbiegen von Fußböden, Schwingungsverhalten von Brücken, Verformungen, die bei der Bearbeitung von Metallen auftreten, Crashtests in der Fahrzeugindustrie. Diese praktischen Probleme werden in der Elastizitätstheorie analysiert. Aus einfachen Grundgleichungen der Mechanik (Kräftegleichgewicht, Spannungsverhalten des Materials) und unter Berücksichtigung der geometrischen Eigenschaften der Körper können die erwähnten Probleme relativ einfach modelliert und gelöst werden.

In dieser Arbeit wird eine Modellierung und die Berechnung der Durchbiegung eines Zylinderrohres beschrieben. Auf dieses Zylinderrohr wirkt eine äußere Kraft \mathbf{f} ein und verursacht somit ein Durchbiegen, eine Deformation. Mit Hilfe von Modellannahmen und Kenntnissen aus der Mechanik kann die Durchbiegung berechnet werden.

Das mathematische Modell wird in den folgenden Abschnitten beschrieben. Als Einstieg werden einige Kenntnisse der linearen Elastizitätstheorie vermittelt. Darauf folgt die mathematische Sichtweise des Problems mit der Herleitung der Gleichungen. Zuerst wird der allgemeingültigere Fall betrachtet. Als Abschluß wird noch der Spezialfall einer „dünnen“ Schale betrachtet.

2 Einführung in die Elastizitätstheorie

Zuerst stellen wir einige theoretische Betrachtungen zur linearen Elastizitätstheorie an. In den folgenden Unterabschnitten werden die Grundgleichungen beschrieben, die zur Herleitung des Zylinderschalenmodells benutzt werden.

Betrachtet wird der Zustand von Körpern unter Einwirkung von Kräften. Von besonderem Interesse sind die Verzerrungen und Spannungen, die durch Deformation erzeugt werden.

2.1 Kinematik

Für einen Körper sei eine Referenzkonfiguration $\bar{\Omega}$ bekannt. $\bar{\Omega}$ bezeichnet den Abschluss einer beschränkten, offenen Menge Ω . $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ ist die Menge, die der Körper im spannungsfreien Zustand annimmt.

Der aktuelle Zustand wird durch eine Abbildung

$$\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definiert. $\phi(x)$ ist der Ort des Punktes, der sich im Referenzzustand am Ort x befindet. Man schreibt

$$\phi := \mathbf{Id} + \mathbf{u} \quad (\text{identische Abb.} + \text{„kleine“ Verschiebung}). \quad (1)$$

Die Starrkörperbewegungen, also Translation und orthogonale Transformation, ändern den Spannungszustand nicht. Die Funktion ϕ wird als genügend glatt vorausgesetzt. Eine Deformation liegt vor, wenn

$$\det(\nabla\phi) > 0$$

gilt. Für lokale Änderungen der Längen ist die Matrix

$$C := \nabla\phi^T \nabla\phi$$

ausschlaggebend. C heißt Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor. Die durch

$$E := \frac{1}{2}(C - I)$$

definierte Abweichung von der Identität bezeichnet man als Verzerrung. Durch Einsetzen von (1) in den Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor erhält man

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

In der linearen Theorie werden die quadratischen Terme vernachlässigt, daher ergeben sich als Näherung die symmetrischen Ableitungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Dies sind die Komponenten des linearen Verzerrungstensors (strain tensor) ε . Die Komponenten von ε haben folgende Bedeutung:

1. ε_{ii} beschreiben die Änderungen der Längen in den 3 Raumrichtungen.
2. ε_{ij} beschreiben die Winkeländerung bezüglich des Koordinatensystems ($i \neq j$).

2.2 Gleichgewichtsbedingungen

In der Mechanik wird der Einfluß der Kräfte axiomatisch behandelt. Es wird angenommen, dass die Kräfte-Wechselwirkungen vollständig zurückgeführt werden können auf

- (a) flächenhaft verteilte Kräfte
- (b) volumenhaft verteilte Kräfte.

Die Volumenkräfte $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ liefern im Volumenelement dV die Kraft $\mathbf{f} dV$. Die Flächenkräfte sind durch eine Funktion $t : \Omega \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spezifiziert (S^2 ist die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3). Sei V eine beliebige und hinreichend glatt berandete Teilmenge von Ω und dA ein Oberflächenelement mit der Normalen \mathbf{n} , dann liefert das Flächenelement dA einen Beitrag $t(\mathbf{x}, \mathbf{n})dA$ zur Kraft, der auch von der Richtung der Normalen abhängen kann. Der Vektor $t(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ heißt Cauchyscher Spannungsvektor.

Das zentrale Axiom der Mechanik besagt, dass alle Kräfte und Momente sich im Gleichgewichtszustand zu Null addieren. Dazu zählen die Volumen- und Flächenkräfte.

Axiom des statischen Gleichgewichts : Der Körper B befinde sich unter den (Volumen-) Kräften f im Gleichgewicht. Dann existiert ein Vektorfeld t auf $B \times S^2$, so dass in jeder Teilmenge V von B

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV + \int_{\partial V} t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS &= 0 \text{ und} \\ \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV + \int_{\partial V} \mathbf{x} \times t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS &= 0 \end{aligned}$$

gilt (\times ist das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3). Nun lässt sich mit dem Satz von Cauchy die Abhängigkeit von der Normalen \mathbf{n} genauer angeben.

Satz 2.1. Seien $t(\cdot, \mathbf{n}) \in \mathcal{C}(B, \mathbb{R}^3)$, $t(\mathbf{x}, \cdot) \in \mathcal{C}^0(S^2, \mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(B, \mathbb{R}^3)$ im Gleichgewichtszustand. Dann gibt es ein symmetrisches Tensorfeld $T \in \mathcal{C}(B, \mathbb{S}^3)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) &= \mathbf{n} \cdot T(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in B, \mathbf{n} \in S^2 \\ \operatorname{div} T(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in B \\ T(\mathbf{x}) &= T^T(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in B. \end{aligned}$$

Hierbei wird mit \mathbb{S}^3 die Menge aller symmetrischen 3×3 Matrizen bezeichnet. Der Tensor T wird als Cauchyscher Spannungstensor bezeichnet.

Die wesentliche Aussage dieses Satzes ist die Darstellung der Spannungsvektoren über dem Tensor. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt die Gleichgewichtsbedingung

$$\int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV + \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot T(\mathbf{x}) dS = \int_V [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \operatorname{div} T(\mathbf{x})] dV = 0.$$

2.3 Kinematische Grundgleichung für den instationären Fall

Wir betrachten zunächst den Impulserhaltungssatz. Dieser besagt, daß die zeitliche Änderung des Impulses (Verschiebungen) gleich der Summe der wirkenden Kräfte ist:

$$\int_V \rho \mathbf{u}_{tt}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV + \int_{\partial V} t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS.$$

Mit \mathbf{f} sind hier äußere Volumenkräfte gemeint, die auf das elastische Medium wirken. Mit Hilfe des Spannungstensors können wir das Oberflächenintegral als

$$\int_{\partial V} t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS = \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot T(\mathbf{x}) dS$$

schreiben. Die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

$$\int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot T(\mathbf{x}) dS = \int_V \operatorname{div} T(\mathbf{x}) dV.$$

Da das Kräftegleichgewicht für beliebige Volumina gelten muß, folgt die Bewegungsgleichung des elastischen Kontinuums:

$$\rho \mathbf{u}_{tt}(\mathbf{x}) = \operatorname{div} T(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Zur Vereinfachung betrachten wir zuerst den stationären Fall, also

$$\operatorname{div} T(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

2.4 Die Piola - Transformation [2]

Die Gleichgewichtsbedingungen sind in den Koordinaten des deformierten Körpers formuliert. Diese sind aber nicht bekannt, deshalb wird eine Transformation auf den Referenzzustand durchgeführt. Sei \mathbf{x}_R der Referenzzustand, man setzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \phi(\mathbf{x}_R) \\ d\mathbf{x} &= \det(\nabla \phi) d\mathbf{x}_R \quad (\text{Volumenelement}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \det(\nabla \phi)^{-1} \mathbf{f}_R(\mathbf{x}_R). \end{aligned}$$

Es ist natürlich auch die Annahme enthalten, dass die Massenpunkte durch die Deformation nicht an einen Ort mit geändertem Kraftfeld geraten. Die Transformation des Spannungstensors ist etwas komplexer, nämlich

$$\operatorname{div}_R T_R + \mathbf{f}_R = 0 \text{ mit } T_R := \det(\nabla \phi) T(\nabla \phi)^{-T}.$$

T_R ist der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor, der aber im Gegensatz zu T nicht mehr symmetrisch ist. Zur Symmetrisierung wird der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\Sigma_R := \det(\nabla \phi) (\nabla \phi)^{-1} T (\nabla \phi)^{-T}$$

definiert. Bei kleinen Deformationen sind die Unterschiede vernachlässigbar. Die Näherung für Σ_R ist σ , und auch diese erfüllt den Satz von Cauchy, also

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in B \\ \sigma(\mathbf{x}) &= \sigma^T(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in B.\end{aligned}$$

2.5 Lineare Materialgesetze

Das lineare Materialgesetz von Hooke lautet

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda(\operatorname{spur}(\varepsilon)) \cdot I,$$

mit den Lamé-Konstanten λ, μ (Materialparameter) und dem identischen Tensor I . Ein Material, bei dem das Gesetz nicht nur für kleine Verzerrungen gilt, heißt St. Vernant-Kirchhoff-Material. Man beachte, dass näherungsweise

$$\operatorname{spur}(\varepsilon) = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

ist. Der Parameter λ beschreibt die Spannungsänderung infolge von Dichteänderungen. Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu},$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktion ν (Poisson Zahl).

2.6 Ebener Spannungszustand (ESZ) „plain stress“

Dieser wird bei den Hypothesen von Mindlin-Reissner verwendet. Dazu folgen einige Anmerkungen an dieser Stelle.

Es gilt folgende Hypothese : Die Normalspannung σ_{3i} verschwindet für alle i , die Funktionen σ, ε sind nur von zwei Variablen (x_1, x_2) abhängig. Am Beispiel einer dünnen Platte sieht man sehr gut, wie die spezielle Lamé-Konstante λ_{ESZ} berechnet wird.

Ausgegangen wird vom linearen Materialgesetz

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda(\operatorname{spur}(\varepsilon)) \cdot I,$$

aus der Hypothese ergibt sich sofort

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \text{ und } \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\operatorname{spur} \varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung wird nach ε_{33} umgestellt:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

Dies wird in das lineare Materialgesetz eingesetzt:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\mu \varepsilon + \lambda \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) \cdot I \\ &= 2\mu \varepsilon + \lambda_{ESZ} \operatorname{spur} \varepsilon \cdot I, \\ \text{mit } \lambda_{ESZ} &= \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \right) = 2\mu \frac{\nu}{1 - \nu}.\end{aligned}$$

2.7 Die Hypothesen von Mindlin und Reissner

Wir betrachten eine dünne Platte (Schale) mit konstanter Dicke d , deren Mittelebene Ω mit der (x_1, x_2) -Ebene übereinstimmt. Es bezeichne

$$V := \Omega \times \left(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Die Platte (Schale) wird durch äußere Kräfte belastet, die orthogonal zur Mittelebene sind, d.h. die Kräfte wirken nur in x_3 -Richtung auf die Platte ein: $\mathbf{f} = \mathbf{e}_3 \cdot f(x_1, x_2)$.

Hypothesen:

- H1 Linearitätshypothese. Die Segmente auf jeder Normalen werden linear deformiert, d.h. die Punkte auf $(x_1, x_2) \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right)$ bleiben auf einer Geraden.
- H2 Die Verschiebungen in x_3 -Richtung sind unabhängig von der x_3 -Koordinate.
- H3 Die Punkte auf der Mittelebene werden nur in x_3 -Richtung deformiert.
- H4 Die Normalspannung σ_{33} verschwindet, d.h. es gilt ebener Spannungszustand.
- H5 Normalenhypothese: Die Normalen sind im deformierten Zustand wieder die Normalen. Dies gilt speziell bei der Kirchhoff-Platte (Koiter-Schale), welche ein Spezialfall der Mindlin-Reissner-Platte (Naughdy-Schale) ist.

Bemerkung 2.2. Die Hypothesen H1-H4 sind nicht widerspruchsfrei. Die Hypothese H4 besagt: $\sigma_{33} = 0 \iff 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0$, d.h. im Allgemeinen ist

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda_{ESZ}}{2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \neq 0,$$

aber (1), (2) führt zu $\varepsilon_{33} = 0$, was einen Widerspruch darstellt.

3 Lineare Elastizitätstheorie

In dieser Theorie werden nur Terme erster Ordnung in den Verschiebungen u berücksichtigt und die Terme höherer Ordnungen werden vernachlässigt. Dies betrifft die Kinematik und die Materialgesetze. Es wird auch zwischen den verschiedenen Spannungstensoren nicht unterschieden. Man schreibt σ anstatt Σ und ε anstatt E .

3.1 Das Variationsproblem

Es ergibt sich folgende Variationsaufgabe: Das Energiefunktional

$$\Pi(v) := \int_V \left[\frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{v}) : \sigma(\mathbf{v}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] dV - \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2)$$

ist zu minimieren, wobei

$$\sigma : \varepsilon := \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik} \sigma_{ik}$$

ist. Die Größen $\sigma, \varepsilon, \mathbf{u}$ sind nicht unabhängig, sondern durch den linearen Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

und das lineare Materialgesetz

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda(\text{spur}(\varepsilon)) \cdot I$$

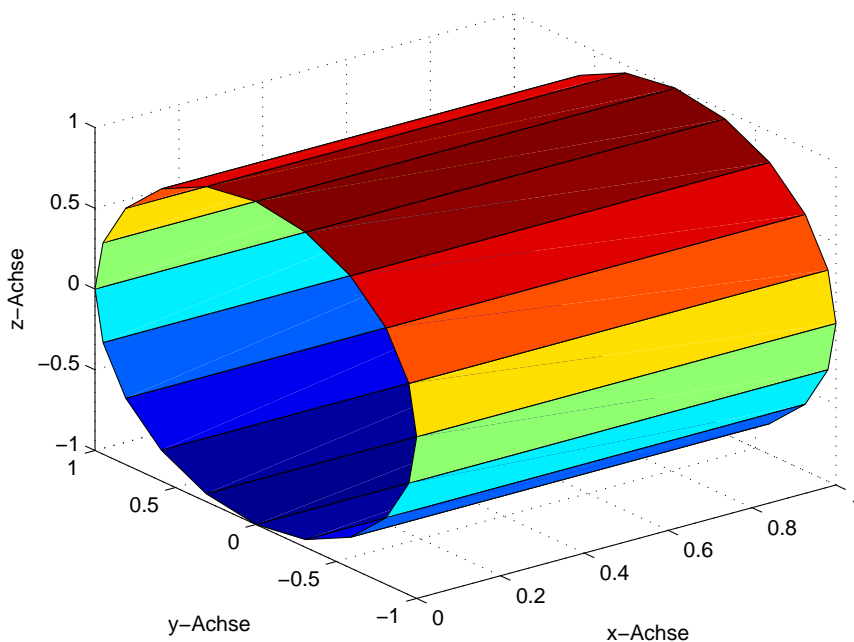
miteinander verknüpft. Mit diesen Gleichungen kann das Energiefunktional umgeschrieben werden:

$$\Pi(v) = \int_V \left[\frac{1}{2} [2\mu \varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{v}) + \lambda \text{div } \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{v}] - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] dV - \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS.$$

Wir werden bei den weiteren Überlegungen für einen Moment den Randterm $\int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS$ vernachlässigen. An späterer Stelle wird detailliert auf die Randbedingungen eingegangen.

4 Herleitung der Bilinearform

Der Zylinder wird in Zylinderkoordinaten (siehe Definition der Parametrisierung) dargestellt. Bei der Herleitung der Gleichungen wird dies beachtet.



Die Zylinderfläche $\Omega_{2D}^C := [0, l] \times [0, 2\pi]$ mit der Länge l des Zylinders und dem Radius R wird beschrieben durch

$$\mathbf{y}(x, \varphi) = \begin{bmatrix} x \\ R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad x \in [0, l].$$

Mit Hilfe der Differentialgeometrie werden nun die Tangentialvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und der Flächennormalenvektor \mathbf{a}_3 der Zylinderfläche bestimmt. Es ist

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.$$

Für unsere Aufgabe ist

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_2 = R \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} =: R\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} =: \mathbf{e}_3.$$

Man definiert die Schale mit Mittelfläche $\mathbf{y}(x, \varphi)$ als

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{y}(x, \varphi) + h\mathbf{e}_3(x, \varphi) \mid h \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right], (x, \varphi) \in \Omega_{2D}^C \right\}.$$

Nun soll die Darstellung in dem natürlichen Koordinatensystem erfolgen, dazu muß die covariante Basis \mathbf{g}_i berechnet werden, um damit die contravariante Basis \mathbf{g}^i (biorthonormale Basis) erhalten zu können, die für die Darstellung des Gradienten-Operators $\nabla = \mathbf{g}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{g}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{g}^3 \frac{\partial}{\partial h}$ benötigt wird. Es gelten

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial h} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_{ij} \quad i = 1, 2, 3,$$

mit dem Kroneckersymbol δ . Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{g}_2 &= (R+h)\mathbf{e}_2 = (R+h) \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}^1 &= \mathbf{e}_1 & \mathbf{g}^2 &= \frac{1}{R+h}\mathbf{e}_2 & \mathbf{g}^3 &= \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Für den Gradienten-Operator ergibt sich die Darstellung

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{R+h}\mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial h}.$$

Bei linearen Elastizitätsproblemen interessiert man sich bei den Deformationen für die Verschiebungen \mathbf{u} , also für die Abweichungen von der Identität.

Da die Ausdehnung bezüglich einer Raumrichtung sehr klein ist, wird nicht das volle 3D-Problem betrachtet, es wird ein Übergang zu einem niedrigdimensionalen Raum vollzogen. In der Schalentheorie werden die Hypothesen von Mindlin-Reissner benutzt, die in den folgenden Ansatz münden

$$\mathbf{u} = u^1(x, \varphi)\mathbf{e}_1 + u^2(x, \varphi)\mathbf{e}_2 + u^3(x, \varphi)\mathbf{e}_3 - h(\theta^1(x, \varphi)\mathbf{e}_1 + \theta^2(x, \varphi)\mathbf{e}_2)$$

mit den Verschiebungen u^i in alle Basisrichtungen und den Verdrehungen θ^i bezüglich der x - und φ -Richtung. Dieser Ansatz beinhaltet die Verschiebungen in Tangentialrichtung u^1, u^2 (Scheibenanteil), die Verschiebungen in Normalenrichtung u^3 und die Verdrehungen θ^i (Plattenanteil).

Der Einfachheit halber verwendet man zur Darstellung der Verschiebung \mathbf{u} wieder die gleiche Basis $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$.

Für den Verzerrungstensor ε benötigt man $\nabla \mathbf{u}$. Mit den Definitionen

$$\frac{\partial}{\partial x} u^i =: u_x^i, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} u^i =: u_\varphi^i$$

folgt

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{R+h} \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial h} \right) ((u^1 - h\theta^1) \mathbf{e}_1 + (u^2 - h\theta^2) \mathbf{e}_2 + u^3 \mathbf{e}_3) \\
&= \mathbf{e}_1 [(u_x^1 - h\theta_x^1) \mathbf{e}_1 + (u_x^2 - h\theta_x^2) \mathbf{e}_2 + u_x^3 \mathbf{e}_3] \\
&+ \frac{1}{R+h} \mathbf{e}_2 [(u_\varphi^1 - h\theta_\varphi^1) \mathbf{e}_1 + (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2) \mathbf{e}_2 - (u^2 - h\theta^2) \mathbf{e}_3 + u_\varphi^3 \mathbf{e}_3 + u^3 \mathbf{e}_2] \\
&- \mathbf{e}_3 [\theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2].
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird umgeordnet bezüglich $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, um später übersichtlicher $\varepsilon(\mathbf{u})$ darstellen zu können:

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^3 l_{ij}(x, \varphi, h) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

$$\text{Dabei bezeichnet } L = [l_{ij}]_{i,j=1}^3 = \begin{bmatrix} u_x^1 - h\theta_x^1 & u_x^2 - h\theta_x^2 & u_x^3 \\ \frac{1}{R+h} (u_\varphi^1 - h\theta_\varphi^1) & \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) & \frac{1}{R+h} (-u^2 + h\theta^2 + u_\varphi^3) \\ -\theta^1 & -\theta^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich der Verzerrungstensor ε in der Form

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mathbf{u}) &= \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \text{ wobei} \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (l_{ij} + l_{ji}) \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist der Verzerrungstensor ε symmetrisch. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_x^1 - h\theta_x^1 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R+h} (u_\varphi^1 - h\theta_\varphi^1) + u_x^2 - h\theta_x^2 \right) \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} (u_x^3 - \theta^1) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R+h} (-u^2 + h\theta^2 + u_\varphi^3) - \theta^2 \right) \\
\varepsilon_{33} &= 0.
\end{aligned}$$

Für das Energiefunktional benötigt man den Spannungstensor σ , der sich aus

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \text{spur } \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot I$$

berechnen läßt. Also gilt für die einzelnen Komponenten des Spannungstensors

$$\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 2\mu \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \sum_i \varepsilon_{ii} \lambda \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad i, j = 1, \dots, 3.$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu (u_x^1 - h\theta_x^1) + \lambda \left(u_x^1 - h\theta_x^1 + \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) \right) \\
\sigma_{12} &= \mu \left(\frac{1}{R+h} (u_\varphi^1 - h\theta_\varphi^1) + u_x^2 - h\theta_x^2 \right) \\
\sigma_{13} &= \mu (u_x^3 - \theta^1) \\
\sigma_{22} &= \frac{2\mu}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) + \lambda \left(u_x^1 - h\theta_x^1 + \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) \right) \\
\sigma_{23} &= \mu \left(\frac{1}{R+h} (-u^2 + h\theta^2 + u_\varphi^3) - \theta^2 \right) \\
\sigma_{33} &= \lambda \left(u_x^1 - h\theta_x^1 + \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) \right).
\end{aligned}$$

In der schwachen Formulierung wird im Energiefunktional $\sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})$ benötigt. Zur Vereinfachung geht man mit Hilfe des Charakterisierungssatzes zur allgemeinen Problemstellung über, d.h. gesucht ist ein \mathbf{u} , welches die Gleichung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

löst. In unserem Problem ist

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_V \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV = \int_V \sum_{i,j=1}^3 \sigma^{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV \\
&= \int_V \underbrace{\left[2\mu \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \lambda \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\mathbf{u}) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\mathbf{v}) \right]}_{=:B} dV.
\end{aligned}$$

Die Summen stellen wir ausführlich dar, zur Vereinfachung betrachten wir nur den Integranden.

$$\begin{aligned}
B &= 2\mu (u_x^1 - h\theta_x^1) (v_x^1 - h\psi_x^1) + \mu \left(\frac{u_\varphi^1 - h\theta_\varphi^1}{R+h} + u_x^2 - h\theta_x^2 \right) \left(\frac{v_\varphi^1 - h\psi_\varphi^1}{R+h} + v_x^2 - h\psi_x^2 \right) \\
&+ \mu (u_x^3 - \theta^1) (v_x^3 - \psi^1) + \frac{2\mu}{(R+h)^2} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) (v_\varphi^2 - h\psi_\varphi^2 + v^3) \\
&+ \mu \left(\frac{1}{R+h} (-u^2 + h\theta^2 + u_\varphi^3) - \theta^2 \right) \left(\frac{1}{R+h} (-v^2 + h\psi^2 + v_\varphi^3) - \psi^2 \right) \\
&+ \lambda \left(u_x^1 - h\theta_x^1 + \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) \right) \left(v_x^1 - h\psi_x^1 + \frac{1}{R+h} (v_\varphi^2 - h\psi_\varphi^2 + v^3) \right).
\end{aligned}$$

Nun erfolgt das Einarbeiten der Hypothesen von Mindlin-Reissner (Naghdy) und Kirchhoff (Köster).

Bezüglich des Ausgangsproblems wird der Zylinder als rotationssymmetrisch angesehen. Die auftretenden Kräfte in Richtung φ heben sich gegenseitig auf, d.h. u^i ist unabhängig von φ und somit gilt

$$\frac{\partial u^i}{\partial \varphi} = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Folglich sind auch die Verdrehungen $\theta^2 = 0$ und deren Ableitungen identisch Null. Im Ansatz ist bereits die Linearitätshypothese eingeflossen und auch dass die Verschiebungen u_i unabhängig von

der Normalenrichtung sind. Damit vereinfacht sich der Integrand B zu

$$B = 2\mu (u_x^1 - h\theta_x^1) (v_x^1 - h\psi_x^1) + \mu (u_x^2) (v_x^2) + \mu (u_x^3 - \theta^1) (v_x^3 - \psi^1) + \frac{2\mu}{(R+h)^2} (u^3) (v^3) \\ + \mu \left(\frac{u^2}{R+h} \right) \left(\frac{v^2}{R+h} \right) + \lambda \left(u_x^1 - h\theta_x^1 + \frac{u^3}{R+h} \right) \left(v_x^1 - h\psi_x^1 + \frac{v^3}{R+h} \right).$$

Da Verschiebungen nur in e_3 -Richtung möglich sind, folgern wir daraus $u^1 = u^2 = 0$ und die entsprechenden Ableitungen sind identisch Null, d.h.

$$B = 2\mu h^2 (\theta_x^1) (\psi_x^1) + \mu (u_x^3 - \theta^1) (v_x^3 - \psi^1) + \frac{2\mu}{(R+h)^2} (u^3) (v^3) \\ + \lambda \left(-h\theta_x^1 + \frac{u^3}{R+h} \right) \left(-h\psi_x^1 + \frac{v^3}{R+h} \right).$$

Als nächster Schritt muß das Integral über dem Körper V betrachtet werden. Wir transformieren

$$\int_V \dots dV \text{ in } \int_S \dots d\varphi dh dx.$$

Dazu benötigt man die Transformationsmatrix J , denn es gilt

$$dV = |\det(J)| d\varphi dh dx.$$

Die Transformationsmatrix ist definiert durch $J := \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial \varphi} & \frac{\partial S}{\partial h} & \frac{\partial S}{\partial x} \end{bmatrix}$. Bei unserem Problem ist

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(R+h) \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ (R+h) \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}, \text{ also } |\det(J)| = R+h.$$

Damit folgt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_0^l \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \left[(2\mu + \lambda) h^2 \theta_x^1 \psi_x^1 + \frac{(2\mu + \lambda)}{(R+h)^2} u^3 v^3 + \mu (u_x^3 v_x^3 + \theta^1 \psi^1) \right. \\ \left. - \mu (u_x^3 \psi^1 + \theta^1 v_x^3) - \frac{\lambda h}{(R+h)} (u^3 \psi_x^1 + v^3 \theta_x^1) \right] (R+h) d\varphi dh dx \\ = 2\pi \int_0^l \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left[(2\mu + \lambda) (R+h) h^2 \theta_x^1 \psi_x^1 + \frac{(2\mu + \lambda)}{(R+h)} u^3 v^3 + \mu (R+h) (u_x^3 v_x^3 + \theta^1 \psi^1) \right. \\ \left. - \mu (R+h) (u_x^3 \psi^1 + \theta^1 v_x^3) - \lambda h (u^3 \psi_x^1 + v^3 \theta_x^1) \right] dh dx \\ = 2\pi \int_0^l \left\{ (2\mu + \lambda) \left[\frac{Rd^3}{12} \theta_x^1 \psi_x^1 + \ln \left(\frac{2R+d}{2R-d} \right) u^3 v^3 \right] + \mu R d (u_x^3 - \theta^1) (v_x^3 - \psi^1) \right\} dx.$$

4.1 Krafteinwirkung auf die Zylinderschale

Es soll die wirkende Kraft \mathbf{f} auf den Zylinder untersucht werden. Diese Kraft ist die Volumenkraft. Diese kann in der gewählten Basis so dargestellt werden:

$$\mathbf{f} = f_V^1 \mathbf{e}_1 + f_V^2 \mathbf{e}_2 + f_V^3 \mathbf{e}_3.$$

In unserer Aufgabe soll die Kraft senkrecht auf den Zylinder wirken, in kartesischen Koordinaten ist daher

$$\mathbf{f} = f_V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt für die wirkende Schwerkraft des Zylinders

$$f_V^1 = 0, \quad f_V^2 = f_V \cos \varphi, \quad f_V^3 = f_V \sin \varphi.$$

Diese wird bei den weiteren Betrachtungen vernachlässigt, da es keine Abhängigkeit von φ gibt. Bei unserem Problem wirkt eine Flächenkraft senkrecht auf dem Zylinder. Diese wird als nächstes betrachtet. Sie wirkt auf den Zylindermantel ein, daher entfällt eine Integration über die Dickenvariable d . Wir erhalten also

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV := \int_{\Omega} f_E \mathbf{e}_3 \cdot v^3 \mathbf{e}_3 \, d\Omega = \int_{\Omega_{2D}^C} f_E v^3 |R| \, d\varphi \, dx = 2\pi R \int_0^l f_E v^3 \, dx.$$

Vereinfachungen in der Bilinearform

Ziel dieses Abschnitts ist, den auftretenden logarithmischen Term zu vereinfachen. Man kann die Funktion

$$f(d) = \ln \left(\frac{2R + d}{2R - d} \right)$$

in eine Taylorreihe an der Stelle $d_0 = 0$ entwickeln. Man erhält

$$f(d) = \ln \left(\frac{2R + d}{2R - d} \right) = \frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} + \frac{d^5}{80R^5} + \mathcal{O}(d^6).$$

Da bei der Schale die Dicke $d \ll R$ ist, können die höheren Potenzen der Entwicklung vernachlässigt werden.

4.2 Bilinearform für den stationären Fall

Wir definieren $w := u^3, \tilde{w} := v^3, f := f_E, \theta := \theta^1, \tilde{\theta} := \psi^1$. Für den stationären Fall ergibt sich die Gleichung

$$a(w, \theta; \tilde{w}, \tilde{\theta}) = 2\pi \int_0^l \left\{ (2\mu + \lambda) \left[\frac{Rd^3}{12} \theta_x \tilde{\theta}_x + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w\tilde{w}) \right] + \mu R d (w_x - \theta)(\tilde{w}_x - \tilde{\theta}) \right\} dx$$

und die rechte Seite

$$(f, \tilde{w}) := 2\pi \int_0^l R f \tilde{w} \, dx.$$

Diese Gleichung gilt für alle $\tilde{w} \in \mathbb{W}$ und für alle $\tilde{\theta} \in \Theta$. Das ist ein Problem 2. Ordnung. Gesucht sind die transversale Verschiebung w und die Verdrehung θ . Eine der Hypothesen von Mindlin-Reissner besagt, dass im Modell der ebene Spannungszustand vorliegt. Im weiteren wird λ durch λ_{ESZ} ersetzt.

4.3 Randbedingungen

Wir gehen von dem Randwertproblem (mit homogenen Randbedingungen)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}(x)) &= \mathbf{f} & x \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{u}(x) &= 0 & \Gamma_D \text{ und} \\ \sigma \cdot \mathbf{n} &= 0 & \Gamma_N \end{aligned}$$

aus. Der Rand des Gebietes V ist $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. In diesem Randwertproblem treten Randbedingungen 1. Art (Dirichlet-Bedingungen) und 2. Art (Neumann-Bedingungen) auf. Wir gehen

zur schwachen Formulierung über, indem wir mit einer beliebigen Testfunktion \mathbf{v} eines geeigneten Testraumes multiplizieren:

$$\int_V \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{f}\mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_D} (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{v} d\Gamma.$$

Wir betrachten zuerst das Dirichlet-Problem, die Menge Γ_N ist dann die leere Menge. Damit erhalten wir folgende Aufgabe:

Finde ein $\mathbf{u} \in H_0^1(V) := \{\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \mathbf{u} \in L^2(V), \partial_{x_i} \mathbf{u} \in L^2(V), \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0\}$ welches

$$\int_V \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{f}\mathbf{v} dV \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(V)$$

löst. In diesem Fall testen wir mit allen Funktionen aus dem gleichen Raum $H_0^1(V)$. Damit entfällt das Integral über den Rand Γ_D . In unserem Modell, nach Einarbeitung der Hypothesen, haben wir den Ansatz:

$$\mathbf{u} = u^3 \mathbf{e}_3 - h\theta^1 \mathbf{e}_1.$$

Aus $\mathbf{u} = 0$ auf Γ_D folgt $u^3 = 0$ und $\theta^1 = 0$. Dies wird in der Praxis allgemein als „hardclamped“ bezeichnet. Etwas schwieriger ist die Betrachtung des Neumann-Problems, in diesem Falle ist die Menge Γ_D leer. Es ergibt sich folgende Aufgabe:

Finde ein $\mathbf{u} \in H^1(V) := \{\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) | \mathbf{u} \in L^2(V), \partial_{x_i} \mathbf{u} \in L^2(V)\}$, welches

$$\int_V \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{f}\mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_N} (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{v} d\Gamma_N \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(V)$$

löst. In diesem Fall werden keine Randbedingungen in den Raum der Testfunktionen \mathbf{v} eingebracht. Die Neumann-Randbedingung ist eine Randbedingung 2. Art und diese wird in der Bilinearform mit beachtet.

Von besonderem Interesse ist die Gleichung $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0$. In unserem Modell liegt der Zylinder entlang der x -Achse, d.h. der Normalenvektor entspricht dem Einheitsvektor \mathbf{e}_1 . Aus unserem bisherigen Überlegungen können wir die Gleichung leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_1 &= 2\mu (u_x^1 - h\theta_x^1) \mathbf{e}_1 + \lambda \left(u_x^1 - h\theta_x^1 + \frac{1}{R+h} (u_\varphi^2 - h\theta_\varphi^2 + u^3) \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \mu \left(\frac{1}{R+h} (u_\varphi^1 - h\theta_\varphi^1) + u_x^2 - h\theta_x^2 \right) \mathbf{e}_2 + \mu (u_x^3 - \theta^1) \mathbf{e}_3 = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Einarbeiten unserer Hypothesen ergibt sich

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_1 = -(2\mu + \lambda)h\theta_x^1 \mathbf{e}_1 + \lambda \left(\frac{u^3}{R+h} \right) \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \mu (u_x^3 - \theta^1) \mathbf{e}_3 = 0.$$

Damit haben wir bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -(2\mu + \lambda)h\theta_x^1 + \lambda \left(\frac{u^3}{R+h} \right) = 0 \\ \sigma_{12} &= 0 \\ \sigma_{13} &= \mu (u_x^3 - \theta^1) = 0 \end{aligned}$$

erhalten. Wir betrachten die Mittelebene für die Schale, d.h. $h = 0$ und somit ist $u^3 = 0$. Nun lassen wir h beliebig im Intervall $[-d/2, d/2]$ laufen, daraus folgt für beliebige h ist $\theta_x^1 = 0$. Die

Konstanten λ, μ sind immer ungleich Null. Weiterhin ergibt sich $u_x^3 - \theta^1 = 0$. In unserem Modell haben wir damit die Randbedingungen:

$$u^3 = 0, \theta_x^1 = 0 \text{ und } u_x^3 - \theta^1 = 0$$

gegeben. In der Praxis wird dies allgemein als „softclamped“ bezeichnet. Im weiteren betrachten wir unsere Modellgleichung und gehen zur „harten“ Formulierung über. In diesem Fall wird aus der Bilinearform $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ eine gemischte Formulierung berechnet.

Wir ordnen die Gleichung bezüglich \tilde{w} und $\tilde{\theta}$, indem wir die Testfunktionen $\tilde{w} = 0$ und dann $\tilde{\theta} = 0$ wählen:

$$\begin{aligned} \int_0^l (2\mu + \lambda_{ESZ}) \frac{Rd^3}{12} \theta_x \tilde{\theta}_x + \mu Rd(-w_x \tilde{\theta} + \theta \tilde{\theta}) dx &= 0 \\ \int_0^l (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w\tilde{w}) + \mu Rd(w_x \tilde{w}_x - \theta \tilde{w}_x) dx &= \int_0^l R f \tilde{w} dx. \end{aligned}$$

Wir integrieren partiell bezüglich x und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_0^l -(2\mu + \lambda_{ESZ}) \frac{Rd^3}{12} \theta_{xx} \tilde{\theta} + \mu Rd(-w_x \tilde{\theta} + \theta \tilde{\theta}) dx + [\theta_x \tilde{\theta}]_0^l &= 0 \\ \int_0^l (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w\tilde{w}) - \mu Rd(w_{xx} \tilde{w} - \theta_x \tilde{w}) dx + [w_x \tilde{w} - \theta \tilde{w}]_0^l &= \int_0^l R f \tilde{w} dx. \end{aligned}$$

Wir wählen zunächst beliebige Funktionen $\tilde{w}, \tilde{\theta}$, die auf dem Rand verschwinden, daraus folgt:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda_{ESZ}) \frac{Rd^3}{12} \theta_{xx} + \mu Rd(w_x - \theta) &= 0 \\ (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) w - \mu Rd(w_{xx} - \theta_x) &= R f. \end{aligned}$$

Das ist die harte Formulierung der Modellgleichung.

Nun wählen wir beliebige Funktionen $\tilde{w}, \tilde{\theta}$, die im Intervall $(0, l)$ verschwinden. Damit bleiben die Randterme:

$$\begin{aligned} [\theta_x \tilde{\theta}]_0^l &= 0 \\ [(w_x - \theta) \tilde{w}]_0^l &= 0 \end{aligned}$$

übrig. Die Funktionenräume für $w(x), \theta(x)$ werden so gewählt, dass sie im Fall „hardclamped“ die Dirichlet-Randbedingungen erfüllen. Aus diesem Raum nehmen wir auch die Testfunktionen. Daraus folgt

$$\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(l) = 0 \quad \forall \tilde{\theta} \in H_0^1(0, l)$$

und

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}(l) = 0 \quad \forall \tilde{w} \in H_0^1(0, l).$$

Im Fall von homogenen Neumann-Randbedingungen („softclamped“) haben wir bereits

$$\theta_x(0) = \theta_x(l) = 0 \text{ und } w(0) = w(l) = 0$$

vorgegeben. In den Funktionsraum $H_0^1(0, l)$ wird bereits die Dirichlet-Randbedingung mit eingebaut und wenn die Testfunktionen $\tilde{w} \in H_0^1(0, l)$ sind, ist

$$[(w_x - \theta) \tilde{w}]_0^l = 0$$

offensichtlich erfüllt. Wird auf dem Rand $\tilde{w} \notin H_0^1(0, l)$ gewählt, haben wir bereits $w_x - \theta = 0$ vorgegeben.

- a) Im Fall „hardclamped“ sind die Lösungen $w(x) \in H_0^1(0, l)$ und $\theta(x) \in H_0^1(0, l)$. Aus diesen Räumen können wir auch unsere Testfunktionen wählen und
- b) bei dem Fall „softclamped“ sind die Lösungsräume unterschiedlich. Für die transversale Verschiebung liegt die Lösung im gleichen Raum wie bei „hardclamped“ in $w(x) \in H_0^1(0, l)$. Die Verdrehung $\theta(x)$ liegt nun aber in einem größeren Raum $H^1(0, l)$, also $\theta(x) \in H^1(0, l)$. Die Testfunktionen können aus $\tilde{w} \in H_0^1(0, l)$ und $\tilde{\theta} \in H^1(0, l)$ gewählt werden.

4.4 Bilinearform für den instationären Fall

Ausgehend vom Impulserhaltungsgesetz

$$\rho \mathbf{u}_{tt} = \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$$

führt man diese Grundgleichung mittels einer beliebigen Vektorfunktion $\mathbf{v}(x)$ in die schwache Formulierung

$$\int_V \rho \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_V [\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}] \, dV$$

über. Der Parameter t , der die Zeitvariable verkörpert, wird für den Moment als fest betrachtet, also $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot)$. Nun integriert man partiell bezüglich x und erhält

$$\int_V \rho \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_V \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial V} (\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS.$$

Einige Ausdrücke wurden im letzten Abschnitt hergeleitet. Der allgemeine Ansatz für die Schale (mit Zeitabhängigkeit t) ist

$$\mathbf{u} = u^1(\varphi, x, t)\mathbf{e}_1 + u^2(\varphi, x, t)\mathbf{e}_2 + u^3(\varphi, x, t)\mathbf{e}_3 - h(\theta^1(\varphi, x, t)\mathbf{e}_1 + \theta^2(\varphi, x, t)\mathbf{e}_2).$$

Zu untersuchen ist vor allem

$$\int_V \rho \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, dV,$$

da die anderen Terme bereits im letzten Abschnitt betrachtet wurden. Der Ansatz für die Zylinderschale nach Einsetzen der Hypothesen ist

$$\mathbf{u} = u^3 \mathbf{e}_3 - h\theta^1 \mathbf{e}_1.$$

Dies wird in das Integral eingesetzt und ergibt

$$\int_V \rho(u_{tt}^3 \mathbf{e}_3 - h\theta_{tt}^1 \mathbf{e}_1)(v_3 \mathbf{e}_3 - h\psi_1 \mathbf{e}_1) \, dV = \int_V \rho(u_{tt}^3 v_3 + h^2 \theta_{tt}^1 \psi_1) \, dV.$$

Nun ergibt die Transformation des Integrals bezüglich der Zylinderschale $dV = |R + h| \, d\varphi \, dh \, dx$

$$\int_V \rho(u_{tt}^3 v_3 + h^2 \theta_{tt}^1 \psi_1) \, dV \text{ in } 2\pi \int_0^l \rho \left[R d u_{tt}^3 v_3 + \frac{d^3 R}{12} \theta_{tt}^2 \psi_2 \right] \, dx.$$

Die Gleichung für den instationären Fall kann damit einfach aufgestellt werden.

In neuer Variablennotation ist für alle $t \in [0, T]$:

$\forall \tilde{w}(x) \in H_0^1(0, l), \forall \tilde{\theta}(x) \in H_0^1(0, l)$ (hardclamped) oder $\forall \tilde{\theta}(x) \in H^1(0, l)$ (softclamped)

$$\int_0^l \left\{ \rho \left(dR w_{tt} \tilde{w} + \frac{d^3 R}{12} \theta_{tt} \tilde{\theta} \right) + (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left[\frac{d^3 R}{12} \theta_x \tilde{\theta}_x + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w \tilde{w}) \right] + Rd \mu (w_x - \theta)(\tilde{w}_x - \tilde{\theta}) \right\} dx = R \int_0^l f \tilde{w} dx.$$

Die Randbedingungen sind analog zum stationären Fall zu wählen (Dirichlet- und oder Neumann-Randbedingungen). Bei diesem Problem werden noch Anfangsbedingungen benötigt, um eine eindeutige Lösung bestimmen zu können. Im einfachsten Fall werden homogene Anfangsbedingungen gesetzt. Man könnte aber auch eine Anfangsverschiebung definieren, die der Verschiebung $w(x)$ im stationären Fall entspräche. Doch zuerst wird die Betrachtung mit homogenen Anfangsbedingungen durchgeführt.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll keine Kraft wirken und somit keine Verschiebung stattfinden, d.h. bei Vernachlässigung des Eigengewichts wird

$$w(x, 0) = \theta(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]$$

angenommen. Eine Anfangsgeschwindigkeit bezüglich der Auslenkung wird auch identisch Null angenommen. Somit wird

$$w_t(x, 0) = \theta_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]$$

gesetzt.

4.5 Der Spezialfall der „dünnen“ Schale

Wir definieren den Raum

$$\mathbb{W}(0, l) = \{w \in H^2(0, l); w(0) = w(l) = 0\}$$

dieser wird für die weiteren Betrachtungen benötigt. In diesem Fall wird die Hypothese (H5) (Kirchhoff-Hypothese) benutzt, d.h. die Normalen zur Mittelfläche sind im deformierten Zustand wieder die Normalen der Mittelfläche

$$\theta^1 = u_x^3 \text{ bzw. } \theta = w_x.$$

Daraus ergibt sich für den stationären Fall sofort

$$a(w, \tilde{w}) = 2\pi \int_0^l \left\{ (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left[\frac{Rd^3}{12} w_{xx} \tilde{w}_{xx} + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w \tilde{w}) \right] \right\} dx \quad \forall \tilde{w} \in \mathbb{W}.$$

Aus dieser Gleichung kann wieder analog zum allgemeinen Fall die „harte“ Formulierung hergeleitet werden. Wir erhalten

$$(2\mu + \lambda_{ESZ}) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{Rd^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w \right) + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) w \right] = R f.$$

Bei dem Fall „hardclamped“ ergeben sich die Randbedingungen analog zum allgemeinen Fall:

$$w(0) = w(l) = 0 \text{ und } w_x(0) = w_x(l) = 0.$$

Im Fall „softclamped“ erhält man

$$w(0) = w(l) = 0 \text{ und } w_{xx}(0) = w_{xx}(l) = 0.$$

Die zweite Randbedingung ist abhängig vom betrachteten Fall. Bei „hardclamped“ ist $w = w_x = 0$ bezüglich des Randes, damit ergibt sich der Lösungsraum $H_0^2(0, l)$. Im Fall „softclamped“ wird die 2. Randbedingung $w_{xx} = 0$ in der Bilinearform berücksichtigt. Die Lösung $w(x)$, bezüglich der schwachen Formulierung, liegt im Raum $\mathbb{W}(0, l)$. Im weiteren betrachten wir nur noch den Fall „softclamped“.

Im instationären Fall gehen wir vom Ansatz

$$\mathbf{u} = u^3 \mathbf{e}_3 - hu_x^3 \mathbf{e}_1 \quad (3)$$

aus. Analog zum allgemeinen Fall interessiert uns das Integral

$$\int_V \rho \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} dV.$$

Wir setzen unseren Ansatz (3) ein und berechnen

$$\begin{aligned} \int_V \rho \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} dV &= \int_V \rho (u_{tt}^3 \mathbf{e}_3 - hu_{xtt}^3 \mathbf{e}_1) (v^3 \mathbf{e}_3 - hv_x^3 \mathbf{e}_1) dV \\ &= \int_V \rho (u_{tt}^3 v^3 + h^2 u_{xtt}^3 v_x^3) dV = 2\pi \int_0^l R dw_{tt} \tilde{w} + \frac{Rd^3}{12} w_{xtt} \tilde{w}_x dx. \end{aligned}$$

Wir integrieren einmal nach x partiell:

$$2\pi \int_0^l R dw_{tt} \tilde{w} + \frac{Rd^3}{12} w_{xtt} \tilde{w}_x dx. = 2\pi \int_0^l R dw_{tt} \tilde{w} - \frac{Rd^3}{12} w_{tt} \tilde{w}_{xx} dx.$$

Der Randterm entfällt, weil wir $w(x, t) = 0$ auf dem Rand fordern und auch die Ableitungen bezüglich t auf dem Rand verschwinden. Es ergibt sich für $t \in [0, T]$ und $\tilde{w}(x) \in \mathbb{W}(0, l)$:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ \rho \left(R dw_{tt} \tilde{w} - \frac{Rd^3}{12} w_{tt} \tilde{w}_{xx} \right) \right. \\ \left. + (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left[\frac{d^3 R}{12} w_{xx} \tilde{w}_{xx} + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w \tilde{w}) \right] \right\} dx = R \int_0^l f \tilde{w} dx. \end{aligned}$$

Das ist die instationäre Gleichung für den Spezialfall der „dünnen“ Schale. Die Randbedingungen bzw. Anfangsbedingungen sind wieder analog zum allgemeinen Fall zu wählen.

5 Zusammenfassung

Wir haben für die Deformation einer Zylinderschale einige Gleichungen für unterschiedliche Fälle und Randbedingungen hergeleitet. Bei diesen Herleitungen wurde der Ansatz von Mindlin-Reissner verwendet. Eine weitere Möglichkeit wäre die Betrachtung der Komponenten des Spannungstensors und die Analyse der Wirkung auf die Zylinderschale. Mit den Gleichgewichtsbedingungen für den stationären bzw. instationären Fall kann dann eine Gleichung für die Deformation der Zylinderschale unter Krafteinwirkung hergeleitet werden. In dieser Arbeit wurde die mathematische Sichtweise des Problems unter Berücksichtigung der Geometrie des Objektes dargelegt.

In unserem Modell betrachten wir eine dünne Zylinderschale mit „softclamped“ Randbedingungen. Damit ergibt sich folgende Aufgabe (in der schwachen Formulierung):

1. Das stationäre Problem:

Finde $w \in \mathbb{W}(0, l)$, das die Gleichung

$$2\pi \int_0^l \left\{ (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left[\frac{Rd^3}{12} w_{xx} \tilde{w}_{xx} + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w\tilde{w}) \right] \right\} dx = R \int_0^l f \tilde{w} dx \quad \forall \tilde{w} \in \mathbb{W}(0, l)$$

löst.

2. Das instationäre Problem:

Finde $w \in L^2(0, T; \mathbb{W})$, das die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \rho \left(Rdw_{tt}\tilde{w} - \frac{Rd^3}{12} w_{tt}\tilde{w}_{xx} \right) + (2\mu + \lambda_{ESZ}) \left[\frac{d^3 R}{12} w_{xx}\tilde{w}_{xx} + \left(\frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} \right) (w\tilde{w}) \right] \right\} dx \\ &= R \int_0^l f(x, t)\tilde{w} dx. \quad \forall \tilde{w}(x) \in \mathbb{W} \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0$$

und für alle $t \in [0, T]$ löst.

Literatur

- [1] P. Nestler: *Diplom-Arbeit: Plattenberechnung nach der Mindlin-Reissner-Theorie*, Technische Universität, Chemnitz, 2004
- [2] D. Braess: *Finite Elemente*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [3] T. Lepikult: *Optimal design of rigid-plastic beams subjected to dynamical loading*, Tartu University, Tartu, Estonia, 1999
- [4] J. Lellep: *Optimal design of plastic reinforced cylindrical shells*, Tartu University, Tartu, Estonia, 1989

Anschrift: Peter Nestler
Institut für Mathematik und Informatik
Jahnstr. 15a
D-17487 Greifswald

E-mail: peter.nestler@uni-greifswald.de