Vorlesung Darstellende Geometrie (DG)

1 Aufgaben der Darstellenden Geometrie

Die DG beschäftigt sich mit ebenen Modellen des dreidimensionalen euklidischen Raumes IR^3. Das heißt, der IR^3 wird in den IR^2 abgebildet. Dafür gibt es drei Möglichkeiten:

- $IR^3 \rightarrow IR^2 \times IR$ *kotierte Projektion*
- $IR^3 \rightarrow IR^2 \times IR^2$ *2-Tafel-Projektion*
- $IR^3 \rightarrow IR^2 \times IR^2 \times IR^2$ *3-Tafel-Projektion*

a) **Bestandteil der mathematischen Ausbildung**
   - z. B. Vertiefung und Erweiterung des Abbildungs- und Mengenbegriffs
   - Sichtbarmachen von Zusammenhängen in Stereo- und Planimetrie

b) **Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens**
   - Erkennen von geometrischen Einzelheiten aus den Bildern eines dargestellten Objektes
   - spielt u. a. in Mathematik eine große Rolle (Stereometrie, Planimetrie, Funktionsdarstellung, Vektorrechnung, Extremwertaufgaben usw.)

c) **Entwicklung des Raumdarstellungsvermögens**
   - Lösung von räumlichen geometrischen Problemstellungen in einer Zeichenebene
   - Entwicklung von Fertigkeiten im geometrischen Zeichnen und Konstruieren

d) **Schulung des technisch-konstruktiven Denkens**

Zur Lösung dieser Aufgaben benötigt man geometrische Methoden – die *Projektionsverfahren*. Jedem Vorgang im Raum (z. B. Ermittlung des Durchstoßpunktes einer Geraden durch eine Ebene) entspricht eine Konstruktion in der Zeichenebene. Das bedeutet, dass man sich die Lösung zunächst im Kopf räumlich vorstellen muss, um sie dann in die Zeichenebene übertragen zu können.

2 Stereometrische Voraussetzungen und Bezeichnungen

Geometrische Objekte:

Punkte	A, B, C, H, G, …
Geraden	g, h, g_1, g_1, ..
Ebenen	ε, δ, π_1, π_2, κ, …

Grundrelationen

Inzidenz (Punkt – Gerade)	$P \in g$, $Q \notin g$
Parallelität	$g \parallel h$, $g \parallel \varepsilon$, $h \not\parallel \varepsilon$
Kollinearität	P, Q, R liegen auf einer Geraden g
Inklusion	$g \subset \varepsilon$, $h \not\subset \varepsilon$

Grundoperationen

Schneiden	$g \cap h = \{P\}$, $g \cap k = \emptyset$, $g \cap \varepsilon = \{D\}$, $\varepsilon \cap \delta = g$
Verbinden	$g = g(P, Q)$, ε (A, B, C), $\varepsilon(P, g)$

Axiome und Sätze

- Durch zwei verschiedene Punkte ist eine Gerade eindeutig bestimmt.
- Eine Ebene ist durch drei nicht kollineare Punkte eindeutig bestimmt.

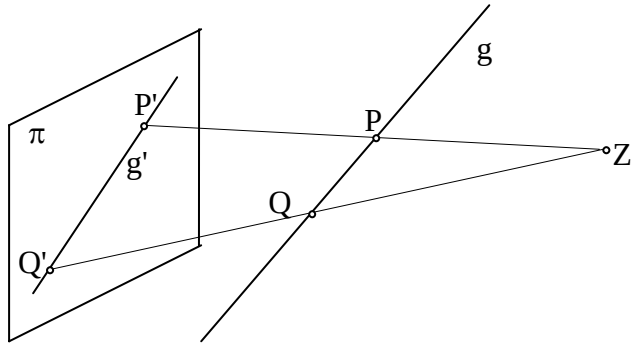
3 Projektionsvorgang und Projektionsarten

Die Darstellende Geometrie benutzt Abbildungen, bei denen Geraden des Raumes (bis auf wenige Spezialfälle) in Geraden der Bildebene übergehen. Solche Abbildungen heißen *linear*. Jedem Raumpunkt P entspricht ein Bildpunkt P', den man wie folgt erhält.
Gegeben: Bildebene π, Raumpunkt P, Projektionsstrahl s durch $P \rightarrow \{P'\} = s \cap \pi$.
Anmerkung: Diese Abbildung ist nicht umkehrbar eindeutig.

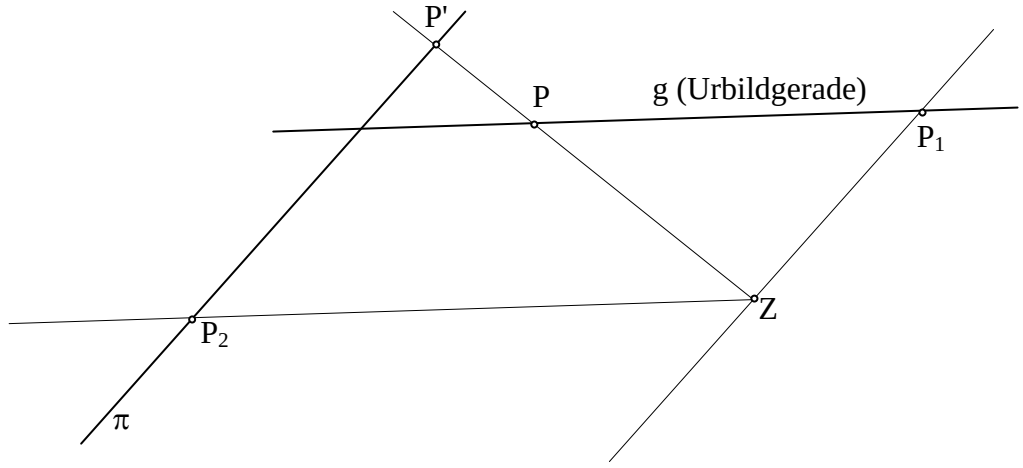
Die Projektionsstrahlen verlaufen entweder parallel oder gehen durch ein gemeinsames Zentrum Z. Wir unterscheiden somit zwischen Parallel- und Zentralprojektion.

3.1 Zentralprojektion (Zentralperspektive)

Die *Zentralprojektion* ahmt den natürlichen Sehvorgang am besten nach. Man nimmt an, dass die Bildebene im physikalischen Sinne senkrecht steht, das Projektionszentrum wird vielfach mit dem Auge identifiziert.



π ist die Zeichenebene, $Z \notin \pi$ das Projektionszentrum, g Raumgerade (Urbildgerade), P, Q Raumpunkte (Urbildpunkte), g' Bildgerade von g, P' und Q' Bildpunkte von P und Q.
Bei diesem Projektionsverfahren treten zwei Sonderfälle ein, die in folgender Draufsicht auf π veranschaulicht sind.



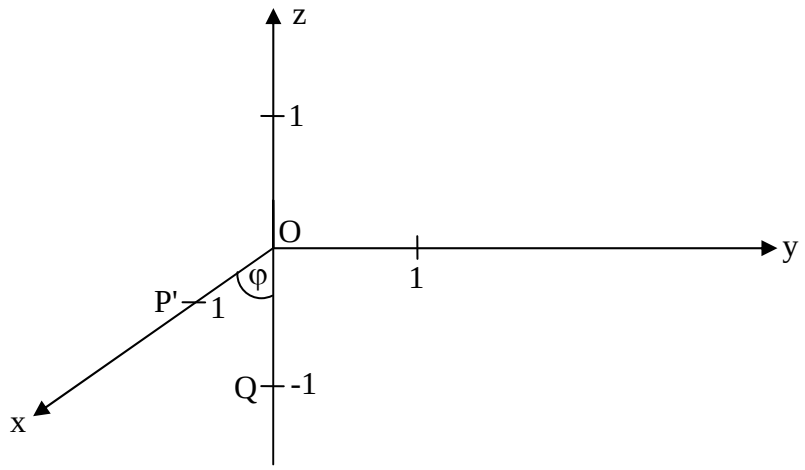
Der Raumpunkt P_1 hat keinen Bildpunkt und wird *Verschwindungspunkt* genannt, P_2 hat auf g keinen Urbildpunkt und wird als *Fluchtpunkt* bezeichnet.

3.2 Parallelprojektion

Hierbei verlaufen die Projektionsstrahlen zueinander parallel. Je nachdem, ob sie senkrecht oder nicht senkrecht auf die Projektionsebene auftreffen, unterscheidet man zwischen *Normalprojektion* oder *schiefer Parallelprojektion.*

3.2.1 Schiefe Parallelprojektion (Schrägrissverfahren)

Die Schrägrissverfahren liefern bei geringem Konstruktionsaufwand anschauliche Bilder. Man stellt sich die Bildebene im physikalischen Sinn senkrecht vor. Als Hilfsmittel für die Maßübertragung verwendet man ein *orthonormiertes räumliches Dreibein* (O; x, y, z). Die x-Achse dieses Dreibeins verläuft senkrecht zur Bildebene, die y-Achse horizontal in der Bildebene und die z-Achse vertikal in der Bildebene. Das Parallelstrahlenbündel fällt schräg von vorn auf die Bildebene.



Seien O, P, Q Raumpunkte mit den Koordinaten (0, 0, 0), (1, 0, 0) und (0, 0, -1) und P' der Bildpunkt von P. Zur Klassifizierung der Art des Schrägbildes werden zwei Parameter betrachtet:

Verzerrungsverhältnis $\lambda = \dfrac{|OP'|}{|OQ|}$

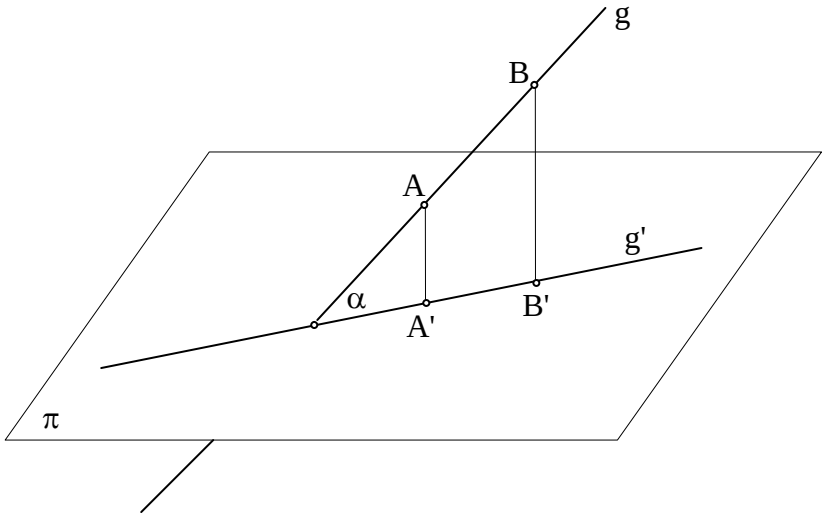
Verzerrungswinkel $\varphi = \angle(P'OQ)$.

Sind $\lambda = \dfrac{1}{2}$ und $\varphi = 45°$, dann handelt es sich um *Kavalierperspektive* (*Dimetrie*),

sind $\lambda = 1$ und φ beliebig, so spricht man von *Isometrie* (z. B. *Vogelperspektive*).

3.2.2 Normalprojektion

Die Normalprojektion wird bei technischen Anwendungen bevorzugt. Da die Projektionsstrahlen senkrecht zur Bildebene verlaufen, hängt das Verkürzungsverhältnis nur noch von der Neigung der Urbildgeraden (Trägergeraden) gegenüber der Bildebene (die man sich jetzt im physikalischen Sinne horizontal gelegen vorstellen kann) ab.



Es gilt: $\cos\alpha = \dfrac{|A'B'|}{|AB|} \Rightarrow |A'B'| = \cos\alpha \cdot |AB|$.

Wenn g senkrecht zur Bildebene π verläuft (g ⊥ π), dann gilt A' = B' und g heißt *projizierend*. Steht die Ebene ε senkrecht auf π (ε ⊥ π), dann ist das Bild von ε eine Gerade und ε befindet sich in *projizierender Lage*.

Durch das zweidimensionale Bild eines dreidimensionalen Objektes ist die Rekonstruierbarkeit noch nicht gesichert. Es sind somit weitere Hilfsmittel notwendig: a) Jedem Bildpunkt wird sein Abstand zur Bildebene (*Höhenkote*) zugeordnet – die *kotierte Projektion* oder b) Herstellung zweier (oder mehrerer) Normalprojektionen auf zueinander senkrechte Ebenen – die *senkrechte Mehrtafelprojektion*.