

Darstellende Geometrie in der Schule

Auszüge aus den Rahmenplänen¹ für Mecklenburg-Vorpommern

Jahrgangsstufen 5 bis 6

Geometrie

Ziele:

An die Vorstellungswelt der Schüler anknüpfend, erfassen sie im Geometrieunterricht die **enge Verbindung von ebener und räumlicher Geometrie**.

Die Schüler kennen grundlegende geometrische Begriffe, Sätze und Verfahren zur mathematischen Beschreibung vielfältiger Phänomene. Bei der Behandlung der Abbildungen **vertiefen** sie ihre **Kenntnisse über geometrische Figuren**, insbesondere durch Symmetriebetrachtungen. Sie sind in der Lage, durch manuelle Tätigkeiten, wie Falten, Schneiden, Zerlegen, Zusammenführen und **Zeichnen**, einfache Begriffe und Beziehungen zu gewinnen und zu vertiefen.

Kreatives und fantasievolles Arbeiten stehen gleichberechtigt neben **genauem Messen und sorgfältigem Zeichnen**. Die vielfältigen Möglichkeiten zur Weiterentwicklung von Fach-, Methoden- und Selbstkompetenz sind zu nutzen.

Die Schüler verfügen über **Fertigkeiten in der Handhabung von Zeichengeräten**. Der Geometrieunterricht hat einen **wesentlichen Beitrag zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens** und zur **ästhetischen Erziehung** der Schüler zu leisten.

Verbindliche Inhalte

Quader, Würfel, Pyramide:

- **Erkennen von Würfeln, Quadern und Pyramiden**
- Ecken, Kanten und Flächen
- Zeichnen und Erkennen von Körpernetzen
- **Zeichnen von Schrägbildern**
- Berechnen des Volumens und des Oberflächeninhaltes von Quadern

Jahrgangsstufe 7

6.2.5 Körperdarstellung

Ziele:

Die Schüler festigen ihr Wissen und Können beim **Darstellen geometrischer Körper**, insbesondere Quader, Pyramide und daraus zusammengesetzter Körper. Sie können diese Körper aus verschiedenen Darstellungen erkennen und **entwickeln** ihr **räumliches Anschauungsvermögen** weiter.

Verbindliche Inhalte

Darstellen von ebenflächig begrenzten Körpern

- **senkrechte Zweitafelprojektion**
- Betrachtungen zur **wahren Größe und Gestalt von geometrischen Figuren**
- **Kavalierperspektive**
- **Schrägbilder**

Jahrgangsstufe 10

6.5.4 Körperberechnung

Ziele:

Mit der **Darstellung** und Berechnung **weiterer Körper** festigen die Schüler ihre stereometrischen Kenntnisse und entwickeln ihr **räumliches Vorstellungsvermögen** weiter.

Sie können Körperberechnungen und Restkörperberechnungen durchzuführen.

Verbindliche Inhalte Hinweise

Pyramide und Kreiskegel

- Volumen und Oberflächeninhalt
- Tetraeder
- Pyramidenstumpf und Kegelstumpf

Kugel

- Volumen und Oberflächeninhalt
- zusammengesetzte Körper

¹ Quelle: www.bildung-mv.de; 11.1.07

Lehrbuchbeispiele

Ernst Klett Schulbuchverlag

Klasse 6

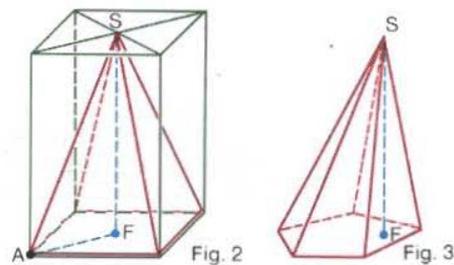
2 Pyramiden

- ① In Ägypten stehen einige 4500 Jahre alte Pyramiden. Die größte von ihnen, die Cheopspyramide, ist auf einer 230 m langen quadratischen Fläche erbaut und 147 m hoch (Fig. 1).
Wie würdest du vorgehen, um aus Pappe ein Modell einer solchen Pyramide zu basteln?



Fig. 1

Körper, die ein Vieleck als Grundfläche haben, und bei denen die Seitenkanten in einem Punkt (der Spitze) zusammentreffen, heißen **Pyramiden** (Fig. 2/3). Die Seitenflächen von Pyramiden sind keine Rechtecke (wie bei Prismen), sondern Dreiecke. Den Abstand \overline{SF} der Spitze von der Grundfläche nennt man die **Höhe** der Pyramide. Jede Seitenkante ist mindestens so lang wie die Höhe.



Bei **regelmäßigen Pyramiden** sind alle Seitenkanten gleich lang und die Grundfläche ist ein regelmäßiges Vieleck. Fig. 2 zeigt eine regelmäßige 4seitige Pyramide; ihre Grundfläche ist ein Quadrat. Solche Pyramiden haben 4 Symmetrieebenen (Fig. 4).

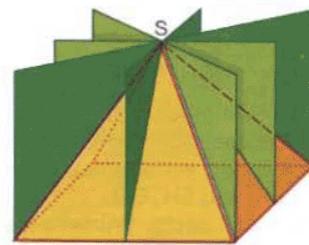
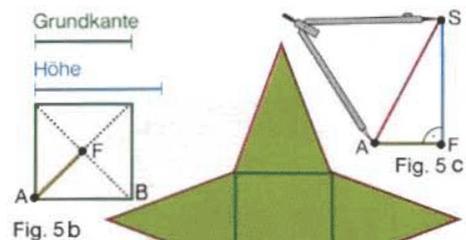


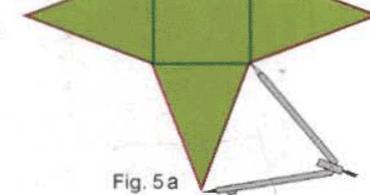
Fig. 4

Jede Symmetrieebene einer Pyramide geht durch die Spitze der Pyramide und durch eine Symmetrieachse der Grundfläche.

Fig. 5 zeigt, wie wir das Netz einer regelmäßigen 4seitigen Pyramide mit vorgegebener Grundkante und Höhe konstruieren können. Erst zeichnen wir in Fig. 5a die Grundfläche. Dann konstruieren wir in Fig. 5c das Dreieck AFS (vgl. Fig. 2); ihm entnehmen wir die wahre Länge der Seitenkanten. Damit können wir nun die vier Dreiecke des Netzes hinzufügen.



- ② a) Zeichne das Schrägbild einer regelmäßigen 4seitigen Pyramide, die 4 cm lange Grundkanten hat und 4,5 cm hoch ist.
b) Konstruiere das Netz dieser Pyramide.



4 Weitere Beispiele

- ① Fig. 1 zeigt eine Balkenverbindung. Stelle andere Möglichkeiten, wie man zwei Balken verbinden kann, in Grund- und Aufriß sowie im Schrägbild dar.



Fig. 1

Die folgenden Beispiele zeigen, wie man durch Grund- und Aufriß sowie ein Schrägbild räumliche Verhältnisse (sowohl was die Maßtreue als auch was die Anschaulichkeit angeht) in befriedigender Weise wiedergeben kann.

Beispiel 1: Balkenverbindung

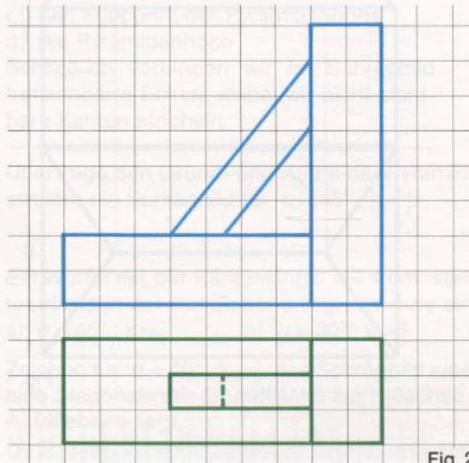


Fig. 2

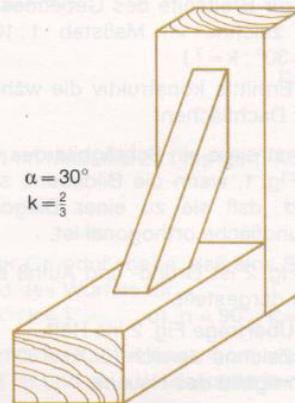


Fig. 3

- ② Konstruiere das Schrägbild in Fig. 3. Verwende die Maße aus Fig. 2.

Beispiel 2: Schrägbild eines Zylinders
Fig. 4 zeigt das Schrägbild eines Zylinders für $\alpha = 90^\circ$; $k = \frac{1}{3}$. Sein Grundriß ist ein Kreis. Um dessen Schrägbild zu finden, bilden wir einzelne Punkte der Kreislinie ab und verbinden ihre Bildpunkte durch eine Kurve.

Bemerkung: Das Schrägbild eines Kreises heißt **Ellipse**.

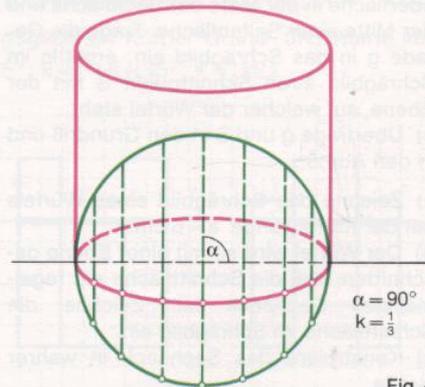


Fig. 4

- ③ Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 cm sowie den diesem Quadrat eingeschriebenen Kreis. Konstruiere für $\alpha = 30^\circ$; $k = \frac{2}{3}$ das Schrägbild von Quadrat und Kreis.

Beispiel 3: Konstruktion von Durchstoßpunkten

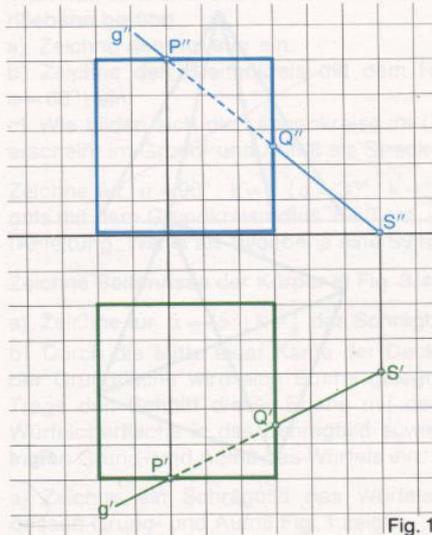


Fig. 1

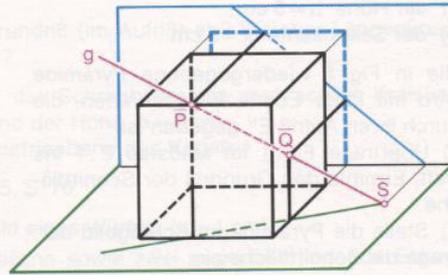


Fig. 2

Fig. 2 zeigt das Schrägbild eines Würfels, der von einer Geraden g durchstoßen wird. Der Verlauf der Geraden ist durch ihren Grund- und Aufriß (Fig. 1) festgelegt.

Um die Schrägbilder P und Q der Durchstoßpunkte zu finden, entnehmen wir Fig. 1 geeignete (zur Bildebene parallele oder orthogonale) Strecken und übertragen sie ins Schrägbild.

- ④ Zeichne Grund- und Aufriß eines Würfels ($a=4\text{ cm}$) sowie eine Gerade g , die seine Oberfläche in der Deckfläche und der vorderen Seitenfläche durchstößt. Konstruiere die Durchstoßpunkte im Schrägbild des Würfels.

Beispiel 4: Schattenkonstruktion

Wir denken uns den Würfel aus Fig. 1/2 von der Sonne so beleuchtet, daß die Sonnenstrahlen die Richtung der Geraden g haben (Fig. 3). Dann wirft der Würfel einen Schatten in die Ebene, auf der er steht (Grundrißebene). Um ihn zu finden, ermitteln wir im Schrägbild – ausgehend von \bar{S} (Fig. 2) – die Schnittpunkte der Sonnenstrahlen durch die Würfecken mit der Grundrißebene.

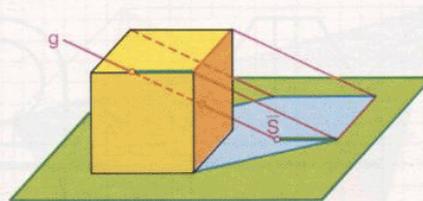
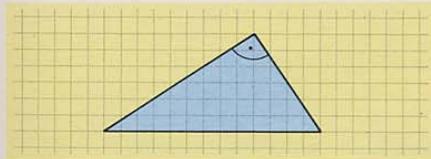


Fig. 3

- ⑤ Fügt man in Fig. 3 die Aufrißebene gemäß Fig. 1/2 hinzu, so fällt ein Teil des Schattens in die Aufrißebene. Zeichne wie in Fig. 2 ein Schrägbild der Grund- und Aufrißebene, des Würfels und der Geraden g . Konstruiere danach den Schatten des Würfels im Schrägbild.

3. Zeichne das Dreieck in dein Heft und verschiebe es:



Verschiebe das Dreieck

- a) 4 Kästchen nach rechts,
- b) 4 Kästchen nach rechts und 2 Kästchen nach oben,
- c) 4 Kästchen nach rechts und 4 Kästchen nach oben,
- d) 2 Kästchen nach rechts und 4 Kästchen nach oben,
- e) 4 Kästchen nach oben.

Vergleiche alle Zeichnungen. In welcher Zeichnung ist am deutlichsten das Bild einer Dreiecksäule entstanden?

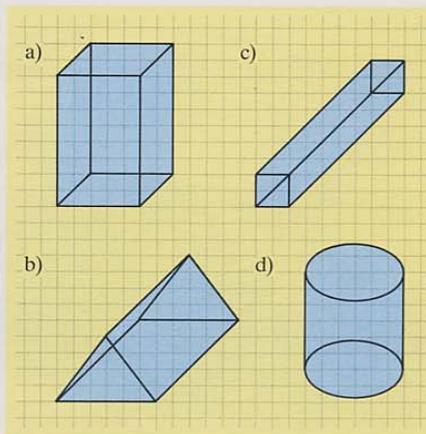
4. Verschiebe einen Kreis mit dem Radius $r = 2$ cm
5 Kästchen nach rechts,
5 Kästchen nach oben.

- 5. a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = 3$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm und verschiebe es 4 cm nach oben.
- b) Zeichne ein Quadrat mit $a = 3,5$ cm und verschiebe es 4 cm nach rechts und 4 cm nach oben.
- c) Zeichne ein Rechteck mit $a = 5$ cm, $b = 4$ cm und verschiebe es 3 cm nach links und 5 cm nach oben.

6. Zeichne ein beliebiges Parallelogramm auf Gitterpapier. Verschiebe das Parallelogramm um 7 Gitterkästchen nach oben. Welchen Körper erkennst du?

7. Versuche einen Würfel so zu zeichnen, daß er möglichst echt aussieht. Dann miß die Kantenlängen und die Winkel in der Grundfläche. Berichte!

8. Durch welche Verschiebung können diese Körper entstanden sein?



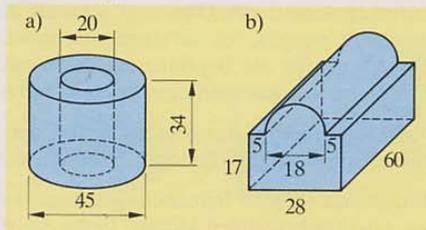
Zeichne die Körper in dein Heft.

9. Zeichne das Zelt doppelt so groß in dein Heft.



10. a) Zeichne die abgebildeten Körper in dein Heft (Maße in mm).

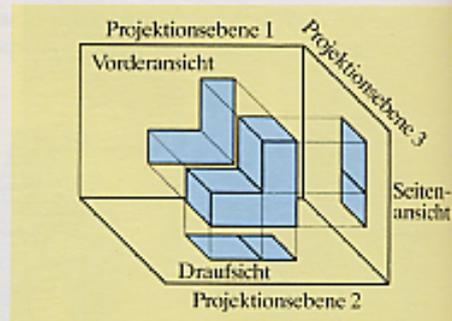
b) Überlege dir zwei weitere zusammengesetzte Körper und zeichne sie in dein Heft.



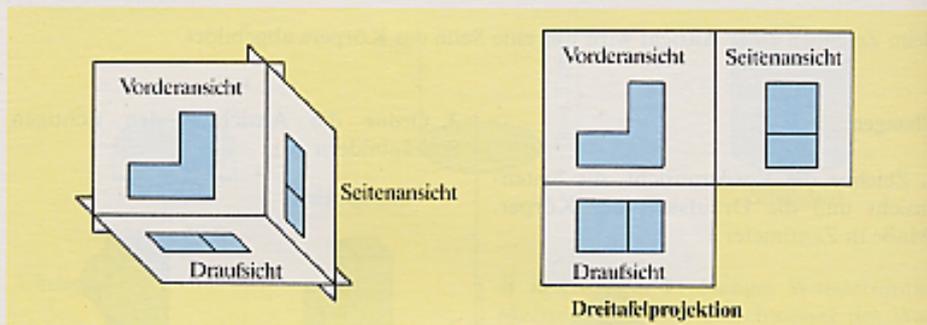
A Dreitafelprojektion

Um die Form eines Körpers möglichst genau zu beschreiben, zeichnet man die Vorderansicht, die Seitenansicht und die Draufsicht des Körpers. Zeichnet man alle drei Ansichten des Körpers, dann spricht man von einer **Dreitafelprojektion**.

Dabei stehen die Projektionsebenen senkrecht aufeinander.

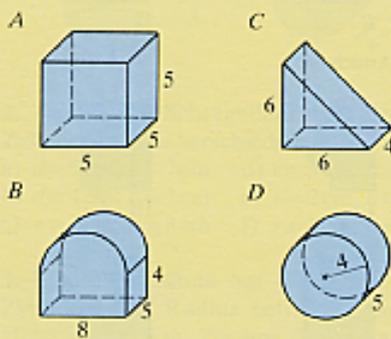


Beim Zeichnen einer Dreitafelprojektion denkt man sich die Projektionsebenen ausgeklappt, so wie es in der folgenden Zeichnung dargestellt ist.

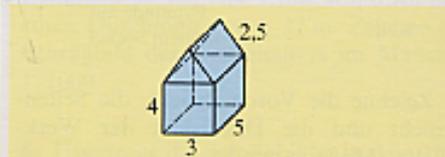


Übungen

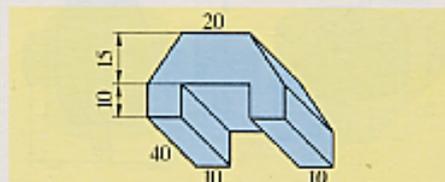
1. Zeichne eine Dreitafelprojektion der folgenden Körper. (Maße in cm.)



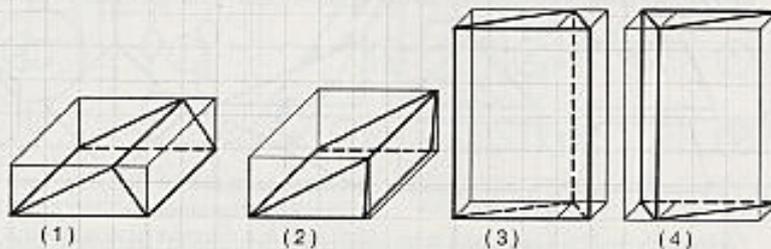
2. Zeichne eine Dreitafelprojektion des Hauses. (Maße in cm.)



3. Zeichne eine Dreitafelprojektion des Werkstückes. (Maße in mm.)



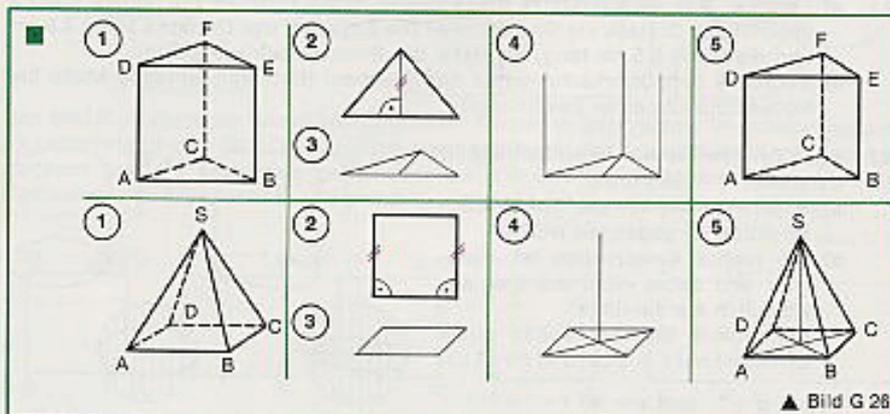
7. Ein Prisma mit dreiseitiger Grundfläche wurde in verschiedenen Lagen im Schrägbild gezeichnet (↗ Bild G 25).
- Zeichne die Auflagefläche des Prismas jeweils in wahrer Größe! Kennzeichne dann farbig, welche Strecken im Schrägbild um die Hälfte verkürzt wurden!
 - Zeichne zwei verschiedene Netze des Prismas!
 - Nutze das Bild G 25, um die Maße des Prismas festzustellen! (Beachte das Verkürzungsverhältnis!) Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des Prismas!



▲ Bild G 25

Bei der Darstellung von Körpern im Schrägbild ist die nachstehende Schrittfolge zu empfehlen:

- Skizziere den Körper in der gewünschten Lage!
- Zeichne die Auflagefläche des Körpers in wahrer Größe und kennzeichne diejenigen Linien, die im Schrägbild um die Hälfte verkürzt werden!
- Zeichne das Schrägbild der Auflagefläche!
- Zeichne die Kanten bzw. Strecken, die nicht verzerrt dargestellt werden! Überlege, welche Hilfslinien du zur Konstruktion des Körpers benötigst!
- Ergänze die Kanten zum vollständigen Schrägbild des Körpers! Kennzeichne sichtbare und verdeckte Kanten und benenne die Eckpunkte!

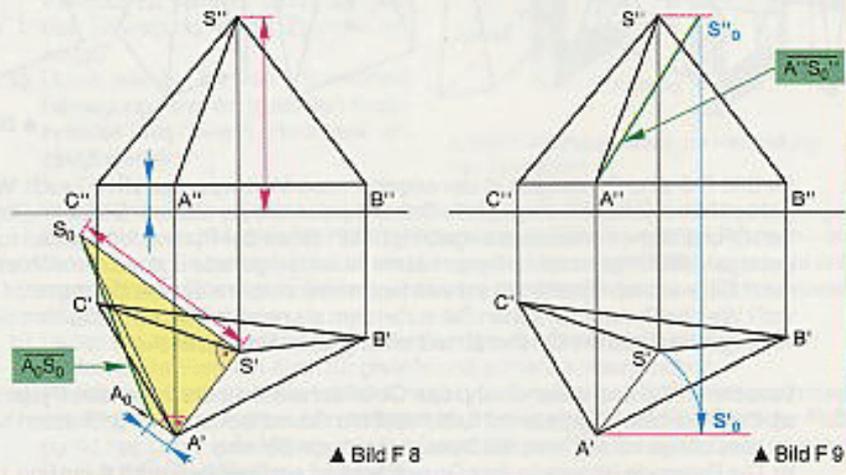


▲ Bild G 28

F ▼ Körperberechnungen und -darstellungen

■ Aus dem Zweitafelbild einer dreiseitigen Pyramide ist die wahre Länge der Strecke \overline{AS} zu ermitteln. Zwei Konstruktionsverfahren bieten sich an:

- ① Das Trapez $A'S'SA$ wird im Bild F 8 in die Grundrißtafel umgeklappt (Viereck $A'S_0A_0$). Die Höhen der Punkte A und S werden im Aufriß abgegriffen.
- ② Durch eine Drehung im Grundriß wird die Strecke \overline{AS} in eine zur Aufrißebene parallele Lage gebracht (Strecke $A''S''$; Bild F 9).



5. a) Übernehmen Sie das Bild der Pyramide auf Transparentpapier! Ermitteln Sie die wahre Länge der Strecke \overline{AS} durch eine Klappung in die Aufrißebene!
 b) Wie kann man die wahre Länge der Höhe einer Seitenfläche der Pyramide konstruktiv ermitteln? Führen Sie die Konstruktion aus!
6. In der Bildserie auf der dritten Umschlagseite liegt die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide in der Grundrißebene. Deshalb wurde jeweils ein Dreieck (ein sogenanntes **Stützdreieck**) zur Ermittlung der wahren Länge einer Strecke umgeklappt.
 a) Wie gelangt man in diesen Fällen zur wahren Länge von \overline{HS} bzw. von \overline{BS} ?
 b) Im Teilbild 3 wurde durch die Umklappung die **wahre Größe und Gestalt** der Seitenfläche ASD ermittelt. Beschreiben Sie die Konstruktion!

Zur Berechnung des Volumens von Pyramiden: Für Pyramiden mit quadratischer Grundfläche, bei denen mit a die Länge der Grundkante und mit h die Länge der Höhe bezeichnet ist, führt die folgende Überlegung zu einer Formel für das Volumen V :

Ein ebener Schnitt in der Höhe $\frac{h}{2}$ zerlegt die Pyramide in eine zu ihr ähnliche Pyramide als „Spitze“ (Volumen V_3) und einen Pyramidenstumpf. Dieser wiederum setzt sich zusammen aus einem Quader als „Kernstück“ (Volumen V_0), vier (zueinander kongruenten) Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen und vier (ebenfalls zueinander kongruenten) kleinen Pyramiden. Bei passender Zusammensetzung ergeben die Prismen zusammen einen zum „Kernstück“ kongruenten Quader, die kleinen Pyramiden eine zur „Spitze“ kongruente Pyramide (Bild F 10).