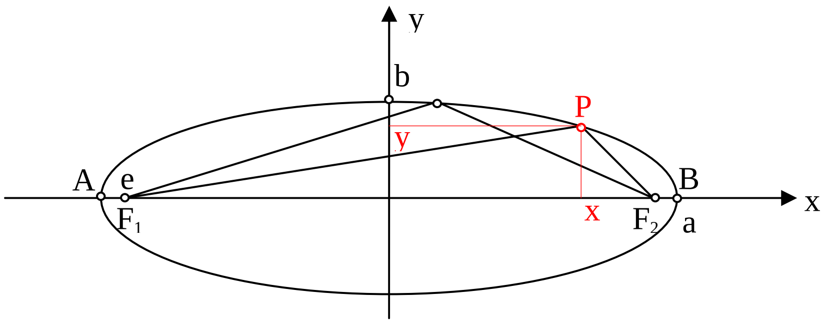
6 Kreis und Ellipse

6.1 Ellipsendefinition

Ortsdefinition

Die Menge aller Punkte P, deren Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstante Summe $|F_1P| + |F_2P|$ haben, ist eine *Ellipse*.



Nach Einführung eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems (siehe oben) erhalten wir folgende Größen und Gleichungen:

Hauptachsenlänge 2a, *Nebenachsenlänge* 2b, Abstand der *Brennpunkte* $|F_1F_2| = 2e$, e heißt *lineare Exzentrizität*.

$|F_1P| + |F_2P| = l_1 + l_2 = 2a \Rightarrow (l_1 + l_2)^2 = 4a^2$ (1)

$e^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow e^2 = a^2 - b^2$ (2)

Für die Koordinaten (x, y) eines Ellipsenpunktes P ergibt sich damit:

$l_1^2 = (e + x)^2 + y^2$ und $l_2^2 = (e - x)^2 + y^2$

$\Rightarrow$ $l_1^2 + l_2^2 = 2(e^2 + x^2 + y^2)$ und (3)

$l_1^2 - l_2^2 = 4ex$ (4)

(4) $\Rightarrow$ $(l_1 + l_2)(l_1 - l_2) = 4ex \Rightarrow (l_1 + l_2)^2 (l_1 - l_2)^2 = 16e^2x^2$ (5)

(1) $\Rightarrow$ $l_1^2 + 2l_1l_2 + l_2^2 = 4a^2 \Rightarrow 2(e^2 + x^2 + y^2) + 2l_1l_2 = 4a^2$ (3) eingesetzt

$\Rightarrow$ $2l_1l_2 = 4a^2 - 2(e^2 + x^2 + y^2)$

Damit ergibt sich für

$(l_1 - l_2)^2 = l_1^2 - 2l_1l_2 + l_2^2 = 2(e^2 + x^2 + y^2) - 4a^2 + 2(e^2 + x^2 + y^2) = 4(e^2 + x^2 + y^2 - a^2)$.

Dies und (1) setzen wir in (5) ein:

$4a^2 \cdot 4(e^2 + x^2 + y^2 - a^2) = 16e^2x^2$

Daraus und aus (2) schließen wir

$16a^2(-b^2 + x^2 + y^2) = 16(a^2 - b^2)x^2$

$\Rightarrow$ $a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2 = 0$

$\Rightarrow$ $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$

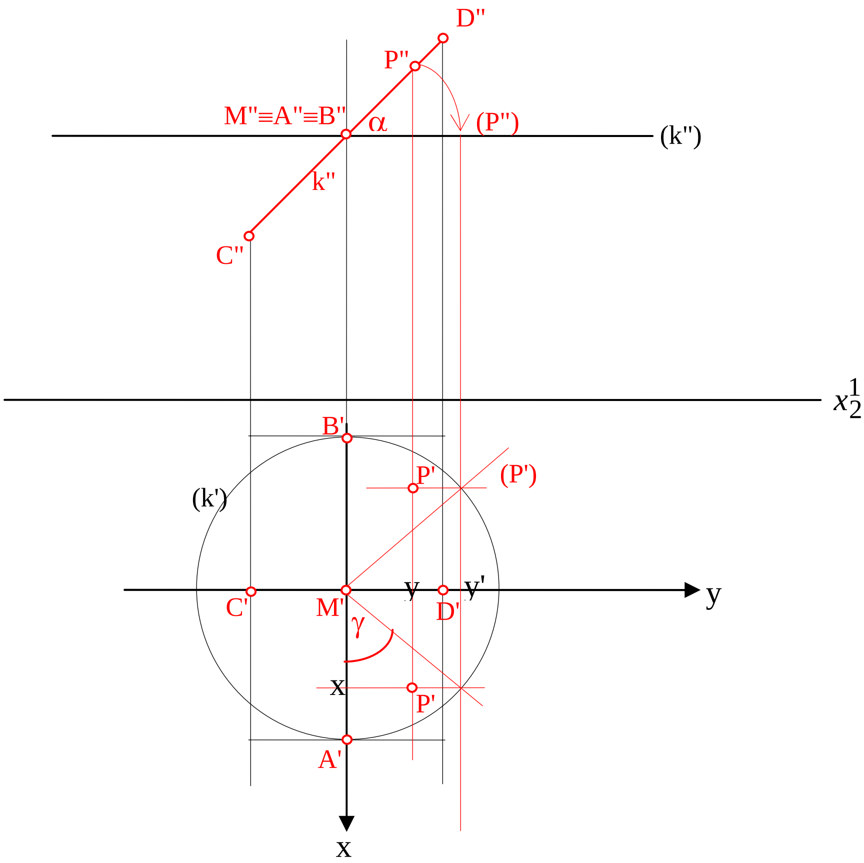
$\Rightarrow$

Mittelpunktgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6.2 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises

Wir betrachten einen Kreis k, der in einer zweitprojizierenden Ebene liegt. C sei tiefster, D höchster Punkt von k bezüglich der Grundrissebene $\pi_1 \Rightarrow$ k" = $\overline{C''D''}$.
Sei weiterhin $\overline{AB}$ der Kreisdurchmesser, der senkrecht zu π_2 steht $\Rightarrow$ A" ≡ B" ≡ M".
Die Tangenten an k in den Punkten A, B, C, D ergeben ein Quadrat, was im Grundriss als Rechteck A'B'C'D' mit den Seitenlängen 2a und 2b erscheint.



Sei nun P" ∈ k", gesucht ist der Grundriss P'.
Lösung durch Paralleldrehen zur Grundrissebene:

k", M', M", x_{12}
↓
(k") := Par(M", x_{12})
(k') := Z(M', r = a)
P" := W(P, P ∈ k")
k_1 := Z(M", |M"P"|)
(P") := S_2(k_1, (k"))
o_1 := O((P"), x_{12})
(P') := S_2((k'), o_1)
p := Par((P'), x_{12})
o_2 := O(P", x_{12})
P' := S_1(p, o_2)
↓
P'

Analytische Betrachtungen

Sei ein Kartesisches Koordinatensystem und die Winkel α und γ wie in der Abbildung oben eingeführt. Gesucht sind die Koordinaten (x, y) von P'.

Es gilt

$$\cos\gamma = \frac{x}{r}, \quad \sin\gamma = \frac{y'}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{y}{y'} = \frac{y}{r \cdot \sin\gamma}$$

$$\Rightarrow x = r \cdot \cos\gamma \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha$$

Durchläuft der Winkel γ das Intervall $[0, 2\pi]$, so beschreibt P' die Kurve k' vollständig, und es gilt $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 \cdot \cos^2\alpha} = 1$.

Daraus folgt, dass es sich bei der Kurve um eine Ellipse mit der Hauptachsenlänge a = r und der Nebenachsenlänge b = r· cos α handelt. Daraus ergibt sich eine weitere Darstellungsform der Ellipse, nämlich die

Parameterdarstellung

$x = a \cdot \cos\gamma$

$y = b \cdot \sin\gamma$

Folgerungen

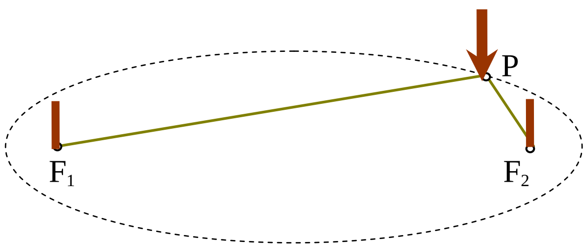
- Die Normalprojektion eines Kreises ist eine Ellipse
- Zwischen Kreis und Ellipse besteht ein perspektiv affiner Zusammenhang
  hier speziell: x-Achse = Affinitätsachse und y-Achse = Affinitätsrichtung

6.3 Ellipsenkonstruktionen

Es gibt punktweise und mechanische (kinematische) Ellipsenkonstruktionen. Aus der Ortsdefinition ergibt sich unmittelbar eine Möglichkeit zur punktweisen Konstruktion und daraus entwickelte sich die *Fadenkonstruktion*, die auch als *Gärtnerkonstruktion*[1] bezeichnet wird.

Fadenkonstruktion (mechanisch)

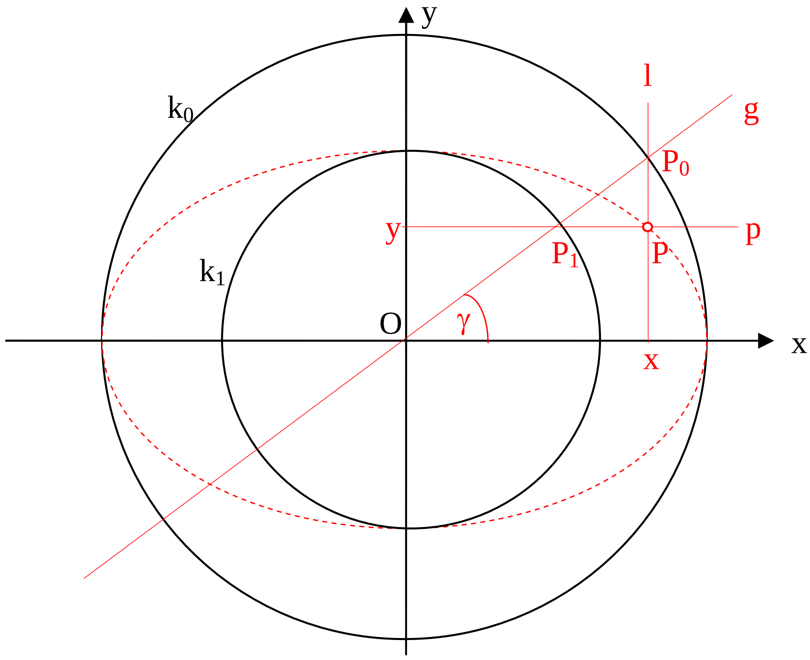
Gegeben: Fixpunkte (z. B. Holzpflöcke) F_1, F_2 und Faden der Länge $2a > |F_1F_2|$, der an den Enden an den Pflöcken befestigt ist. Mit einem weiteren Gegenstand wird nun bei gespanntem Faden die Ellipse erzeugt.



[1] Apollonius von Perge, 262 – 190 v. u. Z.

Zweikreiskonstruktion (punktweise)

Gegeben: a, b (z. B. a = 4 cm und b = 2,5 cm)
Gesucht: Ellipse mit den Halbmessern a und b



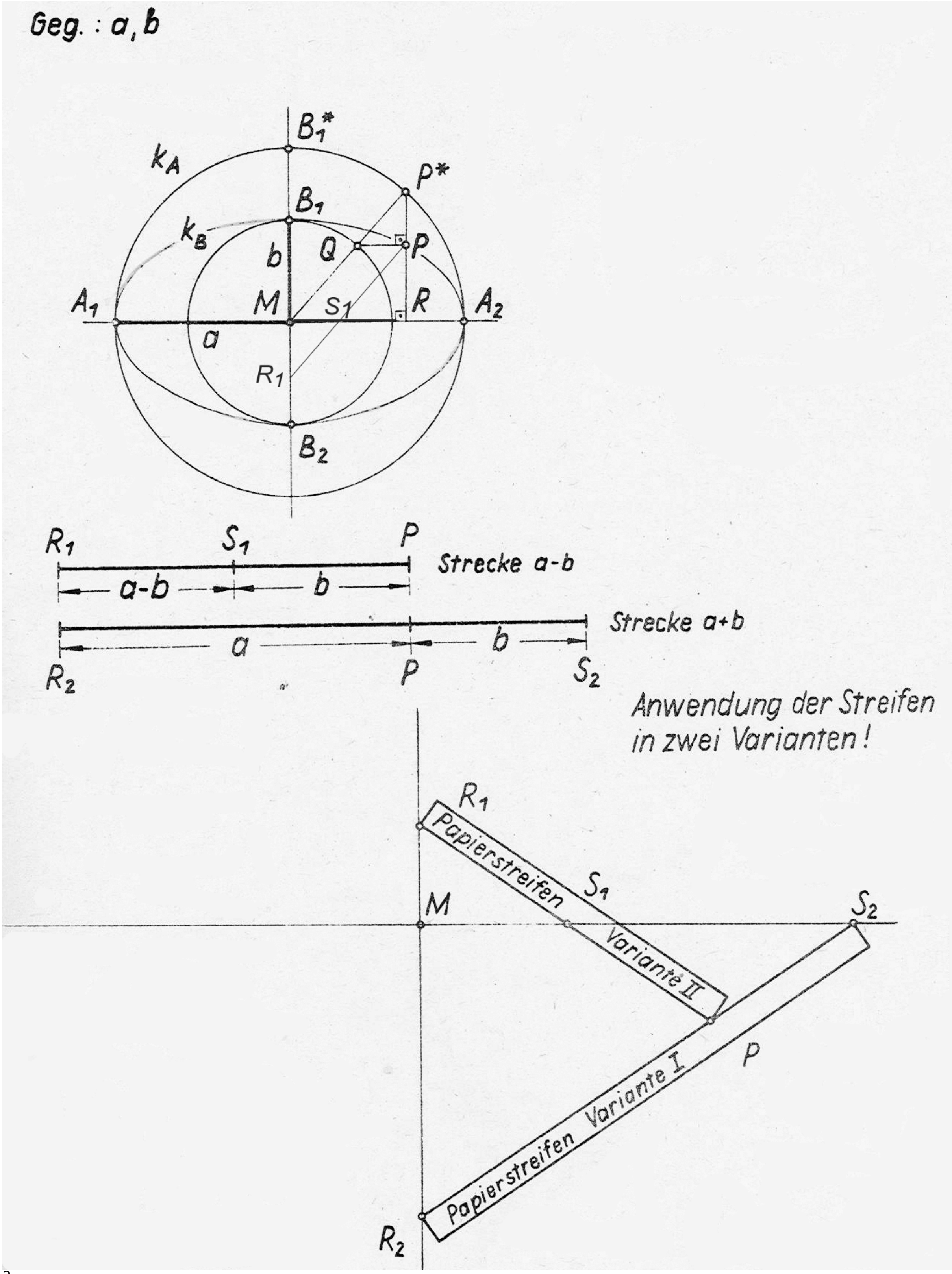
Konstruktionsbeschreibung

KS (O; x, y)
$a, b \in IR^+$
↓
$k_0 := Z(O, a)$
$k_1 := Z(O, b)$
$P_0 := W(P, P \in k_0)$
$g := L(P_0, O)$
$P_1 := S_2(k_1, g)$
$p := Par(P_1, x)$
$l := Lot(P_0, x)$
$P := S_1(p, l)$
↓
P

Behauptung:
P ist Punkt der Ellipse mit der Hauptachsenlänge 2a und der Nebenachsenlänge 2b.
Beweis: Für die Koordinaten x, y des Punktes P gilt: $x = a \cdot \cos \gamma$ und $y = b \cdot \sin \gamma$. Das ist die Parameterdarstellung der Ellipse.

Papierstreifenkonstruktion (mechanisch)

Aus der Zweikreiskonstruktion lassen sich zwei verschiedene Papierstreifenkonstruktionen ableiten:



2

Die Punkte R_i und S_i ($i = 1, 2$) lässt man auf der y- bzw. x-Achse des Koordinatensystems gleiten und P beschreibt dann Ellipsenpunkte.

---

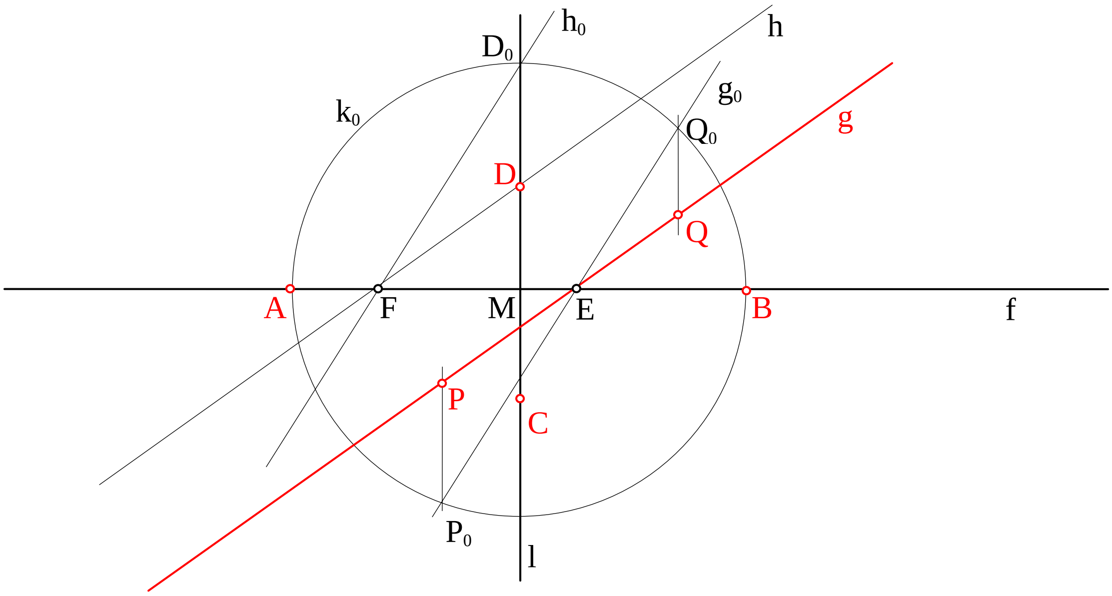
[2] Grafik aus den Sachverhaltsvorgaben zur Darstellenden Geometrie, Pädagogische Hochschule Potsdam, 1988

6.4 Ellipse und Gerade

Aufgabe 1:
Gegeben: Hauptachsenlänge 2a (z. B. a = 3) und Nebenachsenlänge 2b (z. B. b = 1,5) einer Ellipse k und eine Gerade g
Gesucht: Schnittpunkt von g und k (ohne k selbst zu konstruieren)

Hilfsmittel zur Lösung: perspektiv affiner Zusammenhang zwischen Ellipse und Hauptscheitelkreis mit Affinitätsachse = Hauptachse und Affinitätsrichtung = Nebenachse

Lösungsidee: Urbild k_0 von k und Urbild g_0 von g konstruieren, $k_0 \cap g_0 = \{P_0, Q_0\}$, Bildpunkte P, Q zu P_0 und Q_0 konstruieren; dies sind die gesuchten Schnittpunkte der Geraden mit der Ellipse.

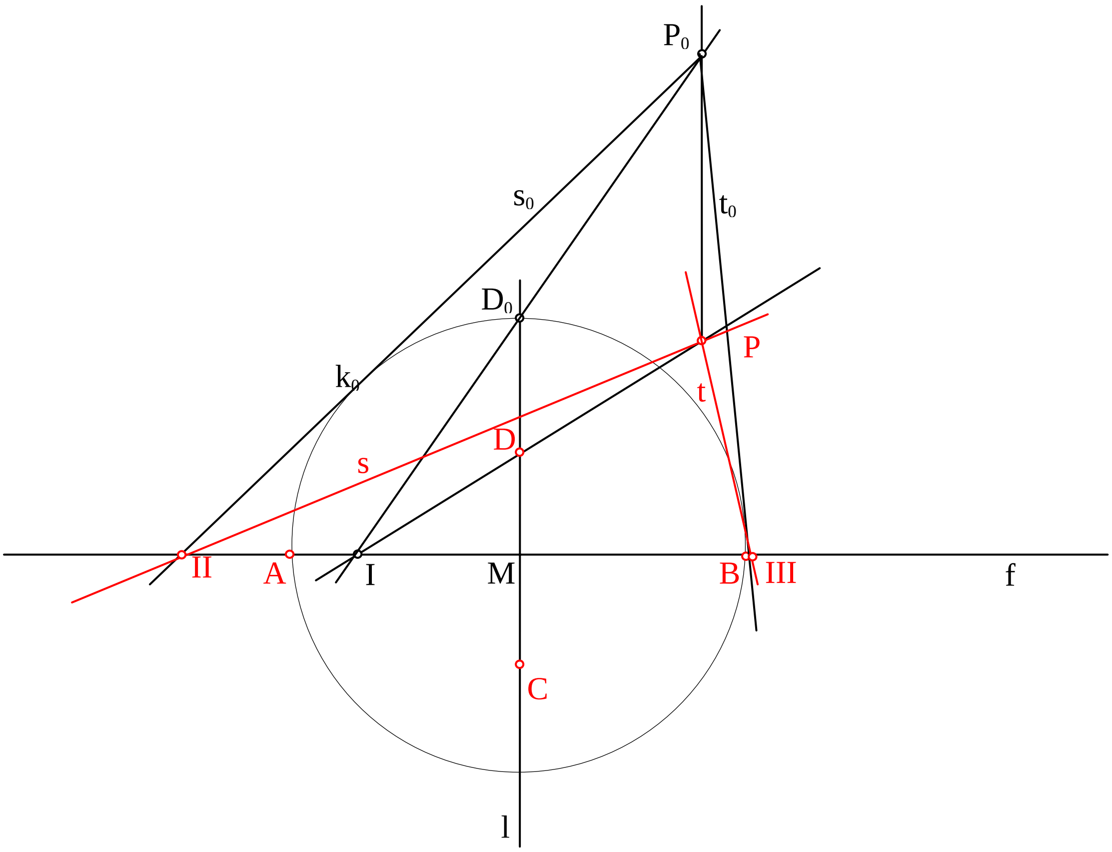


Konstruktionsbeschreibung
ABCD, |AB| = 2a, |CD| = 2b, g(A, B) ⊥ g(C, D), g

f := L(A, B)
l := L(D, C)
M := Mittelpunkt($\overline{AB}$)
k_0 := Z(M, a)
E := S_1(g, f)
h := Par(D, g)
F := S_1(h, f)
D_0 := S_2(k_0, l)
h_0 := L(F, D_0)
g_0 := Par(E, h_0)
{P_0, Q_0} := S_2(k_0, g_0)
l_1:= Lot (P_0, f)
l_2 := Lot(Q_0, f)
P := S_1(l_1, g)
Q := S_1(l_2, g)

P, Q

Aufgabe 2:
Gegeben: Hauptachsenlänge 2a (z. B. a = 3) und Nebenachsenlänge 2b (z. B. b = 1,5) einer Ellipse k und ein Punkt $P \notin k$.
Gesucht: Tangenten von P an k.



Konstruktionsbeschreibung

ABCD, |AB| = 2a, |CD| = 2b,
g(A, B) ⊥ g(C, D), P

$\downarrow$

f := L(A, B)
l := L(D, C)
M := Mittelpunkt($\overline{AB}$)
k_0 := Z(M, a)
P_0 := p. a. Urbild(P; f, l)
s_0, t_0 := Tangenten(P_0, k_0)   (Konstruktion mittels Thaleskreis über Strecke MP_0)
s, t := p. a. Bilder (s_0, t_0; f, l)

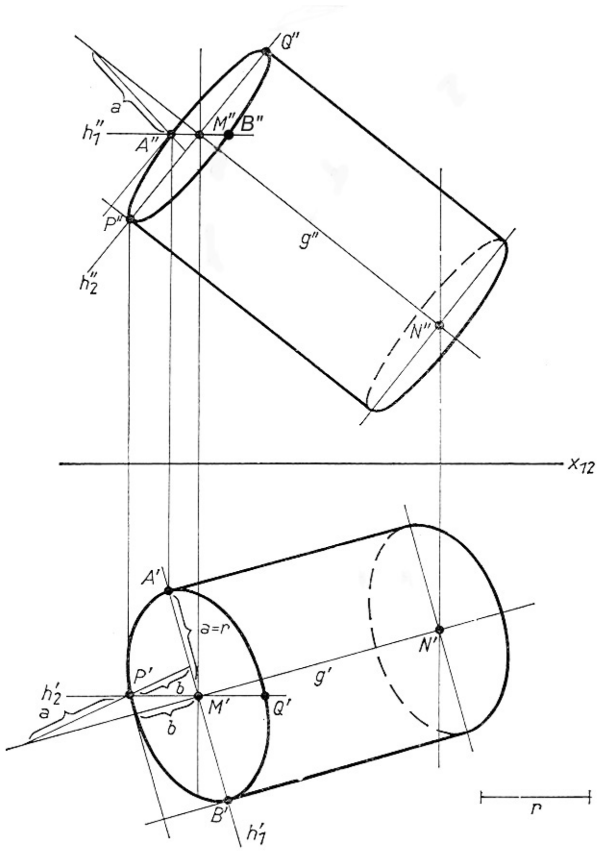
$\downarrow$

s, t

6.5 Darstellung von Drehkörpern

Beispielaufgabe[3]

Gegeben: Grund- und Aufriss der Achse $\overline{MN}$ (z. B. M(4, 3, 7) und N(2, 8, 2)) und der Radius r (= 2) eines Zylinders in allgemeiner Lage.
Gesucht: Darstellung des Zylinders in senkrechter Zweitafelprojektion.



Konstruktionsbeschreibung

g(M, N), r $\in$ IR

$\downarrow$

ν := Normalebene zu g durch M (durch Paar von Hauptlinien h_1, h_2)
k_1:= Z(M'; r)
A', B' := S_2(k_1, h_1')
A'', B'' := Aufriss(A', B')
k_2 := Z(M''; r)
P'', Q'' := S_2(k_2, h_2'')
P', Q' := Grundriss(P'', Q'')
k' := Papierstreifenkonstruktion(A', B', P', Q')
k'' := Papierstreifenkonstruktion(A'', B'', P'', Q'')

$\downarrow$

k', k''

---

[3] Grafik aus: *E. Schröder*: Darstellende Geometrie, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974, S. 111