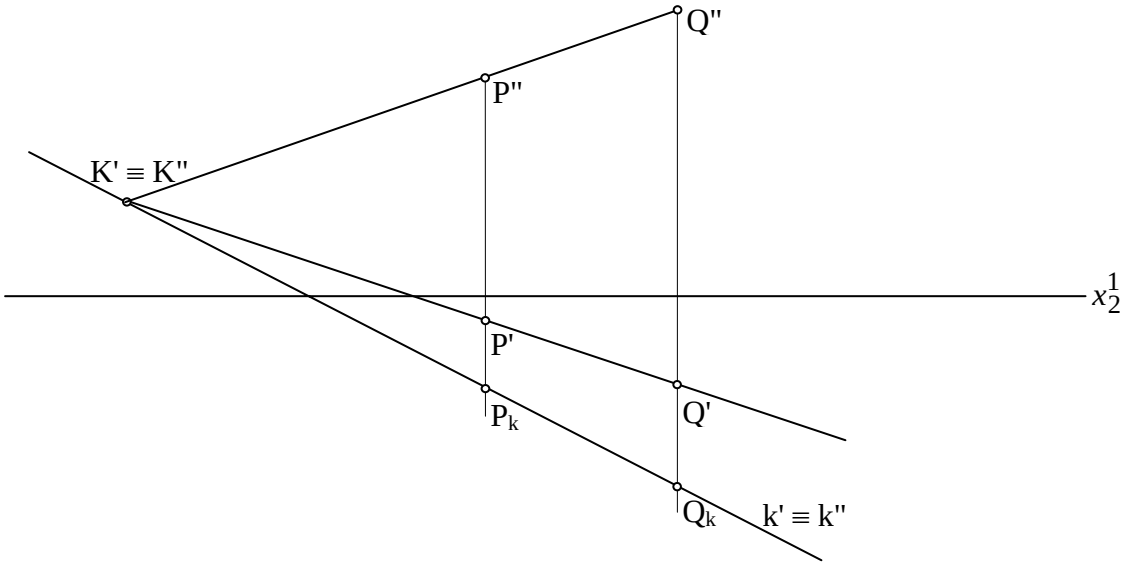
5 Ebene perspektive Affinität

Im Folgenden wollen wir eine geometrische Verwandtschaft zwischen dem Grundriss ε' und dem Aufriss ε" einer Ebene ε untersuchen (ε' und ε" sind also zwei ebene Punktmengen in vereinter Lage).

Sei ε gegeben in Senkrechter Zweitafelprojektion durch die Koinzidenzgerade k (d. h. k'≡ k") und einen nicht auf k liegenden Punkt P. Weitere Punkte Q ∈ ε erhält man durch die Methode des Angitterns.



Seien P_k und Q_k die Schnittpunkte der Ordner zu P bzw. Q mit der Koinzidenzgeraden k'.
Wir betrachten nun diejenige Punktabbildung φ, die jedem Punkt P' ∈ ε' den Punkt P"∈ ε" zuordnet. Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften:

1. φ ist eindeutig umkehrbare Abbildung.
2. Sind P', Q', R' kollinear, dann sind auch P", Q" und R" kollinear.
   Aus 1. und 2. folgt, dass φ *Kollineation* ist.
3. Ist P' ∈ k', dann gilt φ(P') = P" = P', d. h. k' ist *Fixpunktgerade* der Abbildung φ.
4. Für alle Punkte P und Q gilt: g(P', P") ist parallel zu Geraden g(Q', Q").
5. Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über.
6. Es gilt folgende Gleichung (nach dem Strahlensatz):
   $$TV(P', P''; P_k) := \frac{|P_k P'|}{|P_k P''|} = \frac{|Q_k Q'|}{|Q_k Q''|} = TV(Q', Q''; Q_k) = c$$
   c heißt *charakteristisches Teilverhältnis* (TV) der Abbildung φ.
7. Sind P', Q', R' kollinear, dann gilt $TV(P', Q'; R') = \frac{|P' R'|}{|Q' R'|} = \frac{|P'' R''|}{|Q'' R''|} = TV(P'', Q''; R'')$.

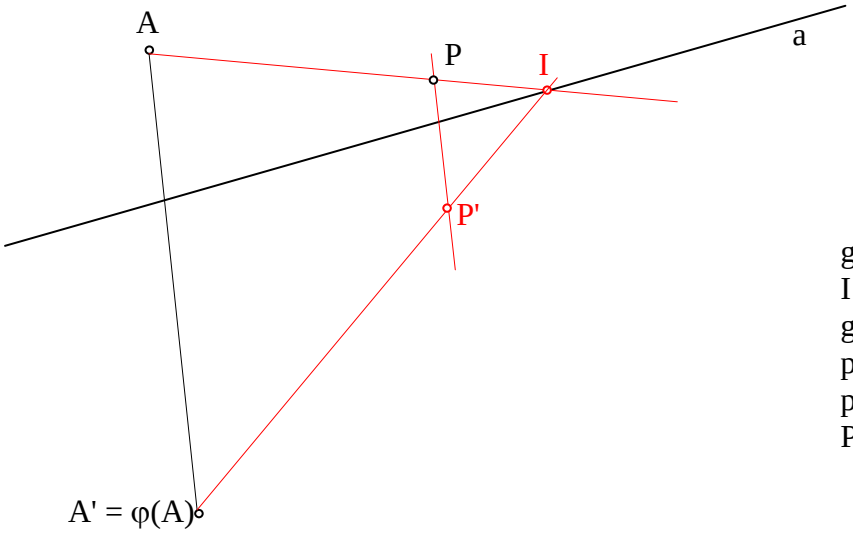
Hat eine Abbildung φ einer Ebene ε auf sich die Eigenschaften 1 bis 7, dann heißt diese Abbildung *perspektiv affin*.

Definition:
Eine Abbildung φ einer Ebene ε auf sich heißt *perspektiv affin* : ⇔

- φ ist *Kollineation*.
- Es existiert eine Fixpunktgerade a (*Affinitätsachse*).
- Entsprechende Punkte P und φ(P) liegen auf zueinander parallelen Geraden (*Affinitäts-richtung*).
- Parallelität und Teilverhältnis sind *Invarianten* von φ.

Satz
Durch Angabe der Affinitätsachse a und der Affinitätsrichtung (P, φ(P)) ist eine perspektiv affine Abbildung eindeutig bestimmt.

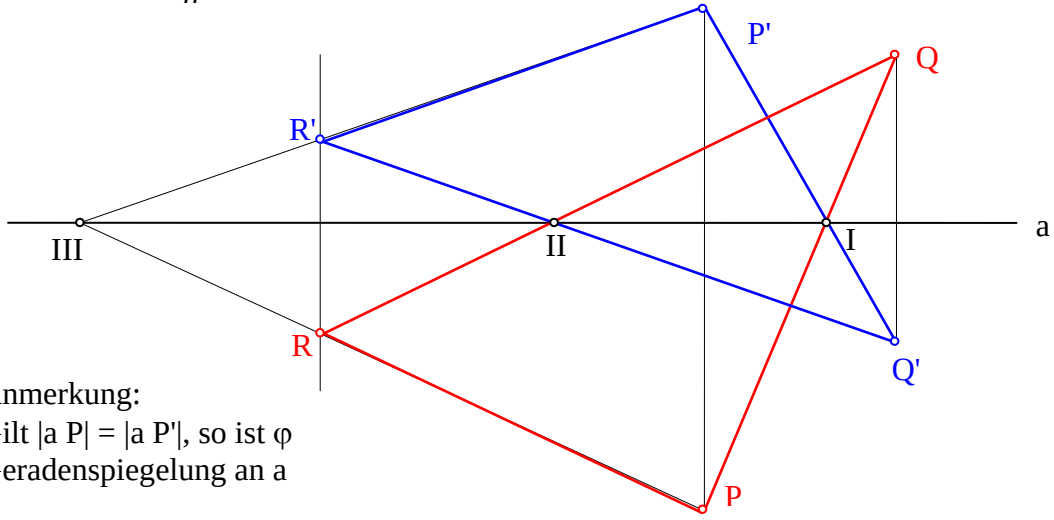
Beweis durch Konstruktion:
Gegeben: a, A, A', P. Gesucht: P' = φ(P)



a, A, A', P
↓
g : = L(A, P)
I : = S_1(g, a)
g' : = L(I, A')
p_1 : = L(A, A')
p_2 : = Par(p_1, P)
P' : = S_1(g', p_2)
↓
P'

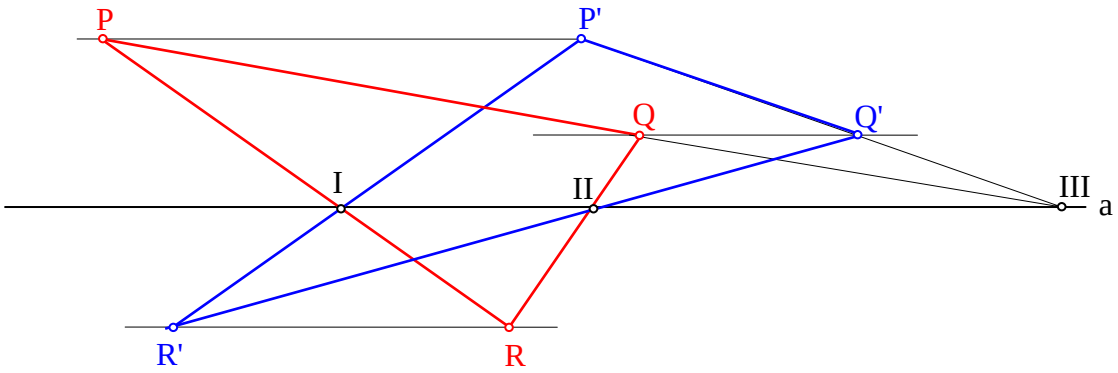
Nachweis der Richtigkeit der Konstruktion:
I ∈ a ist Fixpunkt der Abbildung φ, g(P, P') ist parallel zu g(A, A') – vorgegebene Affinitäts-richtung; P'∈ g(I, A'), da φ Kollineation ist.
Bemerkung: Affine Abbildungen sind im Allgemeinen nicht winkeltreu.

Spezialfälle perspektiv affiner Abbildungen
φ ist *normale Affinität* : ⇔ Affinitätsachse a steht senkrecht auf der Affinitätsrichtung PP'.

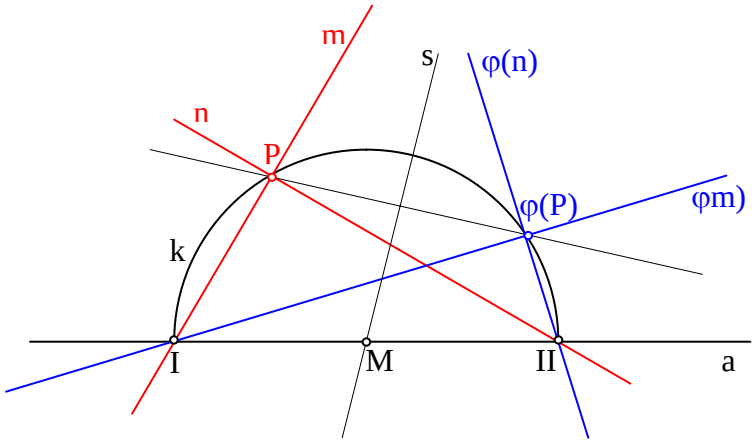


Anmerkung:
Gilt |a P| = |a P'|, so ist φ Geradenspiegelung an a

φ ist *Scherung* : ⇔ Affinitätsachse a ist parallel zur Affinitätsrichtung PP'.



Satz (Invariantes Rechtwinkelpaar)
Ist φ perspekiv affine Abbildung, die keine Geradenspiegelung ist, dann existiert durch jeden Punkt P genau ein Paar (m, n) senkrechter Geraden, deren Bilder φ(m) und φ(n)) sich in φ(P) ebenfalls unter einem rechten Winkel schneiden.
Beweis:
Der Beweis erfolgt durch eindeutige Konstruktion unter Ausnutzung des Satzes von Thales.

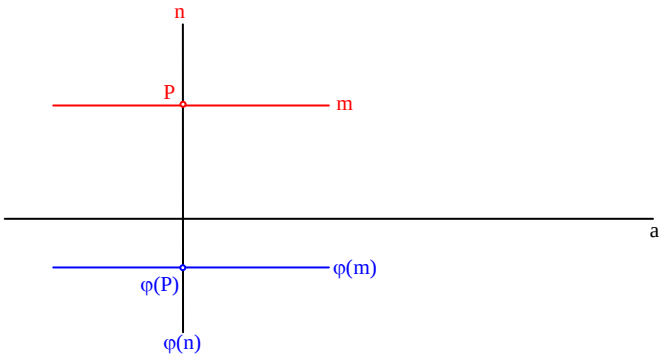


1. Fall
φ ist keine normale Affinität

Konstruktionsbeschreibung

a, P, φ(P)
↓
s : = Mittelsenkrechte($\overline{P\varphi(P)}$)
M : = S_1(a, s) (ex. nur dann, wenn φ nicht normal)
k : = Z(M, |M P|)
I, II : = S_2(a, k)
m : = L(I, P)
n : = L(II, P)
φ(m) : = L(I, φ(P))
φ(n) : = L(II, φ(P))
↓
(m, n), (φ(m), φ(n))

Begründung: m ⊥ n und φ(m) ⊥ φ(n) nach Satz des Thales, jeder Konstruktionsschritt ist eindeutig ausführbar.



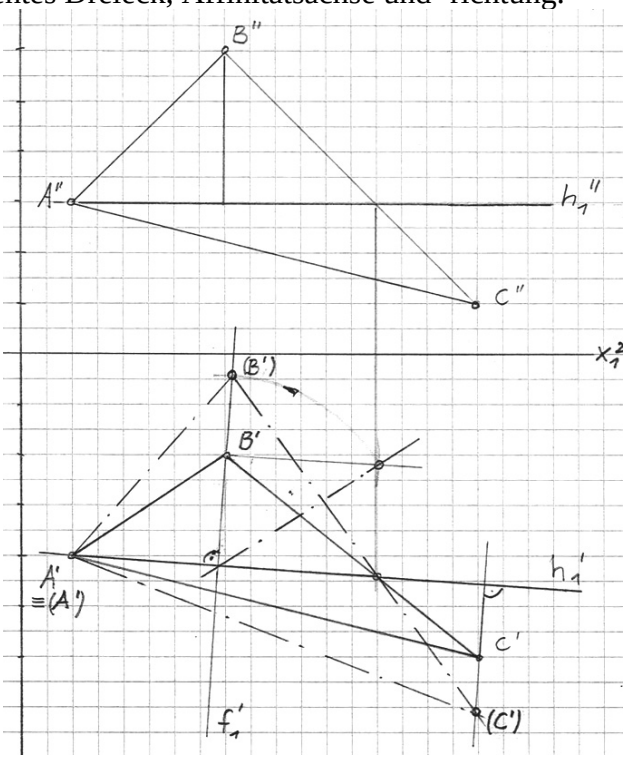
2. Fall
φ ist normale Affinität und keine Geradenspiegelung

n ⊥ a und P ∈ n ⇒ φ(n) ≡ n
m || a und P ∈ m ⇒ φ(m) || a und φ(P) ∈ φ(m)
⇒ (m, n) und (φ(m), φ(n)) ist das invariante Rechtwinkelpaar.

Beispiele für perspektiv affine Abbildungen
Ein perspektiv affiner Zusammenhang besteht zwischen
1. Grund- und Aufriss bei senkrechter Zweitafelprojektion,
2. dem Grundriss F' einer ebenen Figur und dem Grundriss (F)' der zur Rissebene parallel gedrehten Figur,
3. dem Grundriss und dem Schlagschatten einer ebenen Figur,
4. Kreis und Ellipse.

Zu 1. Affinitätsachse a = Koinzidenzgerade k, Affinitätsrichtung = Richtung der Ordner P'P".

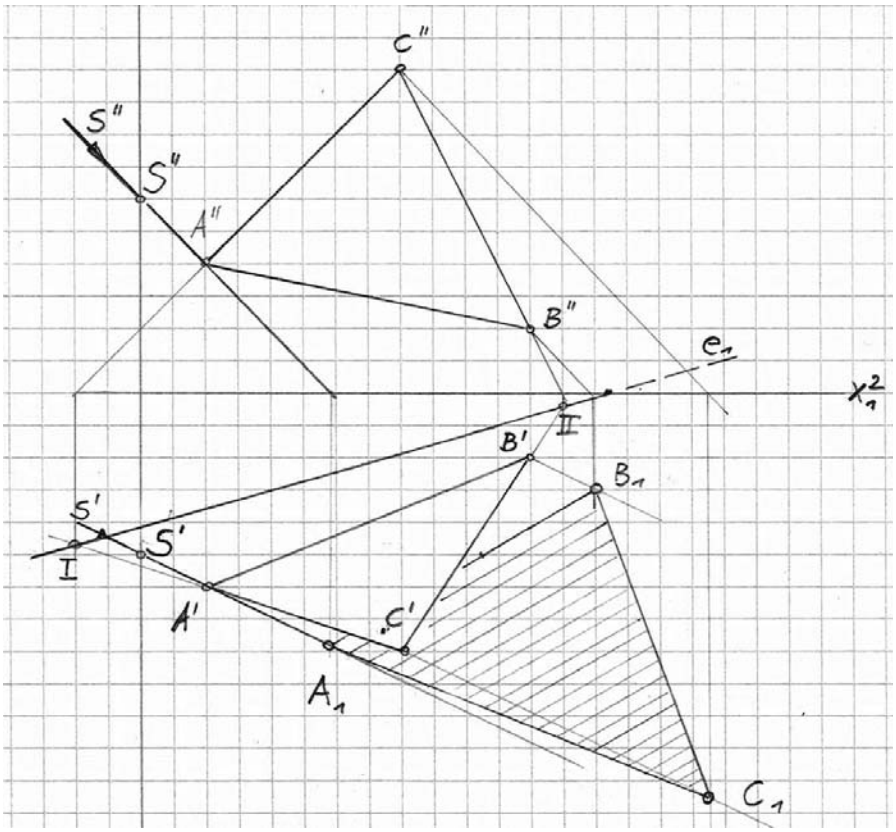
Zu 2. **Aufgabe:**
Gegeben Dreieck A, B, C durch A(4, 1, 3), B(2, 4, 6), C(6, 9, 1)
Gesucht: parallel gedrehtes Dreieck, Affinitätsachse und -richtung.



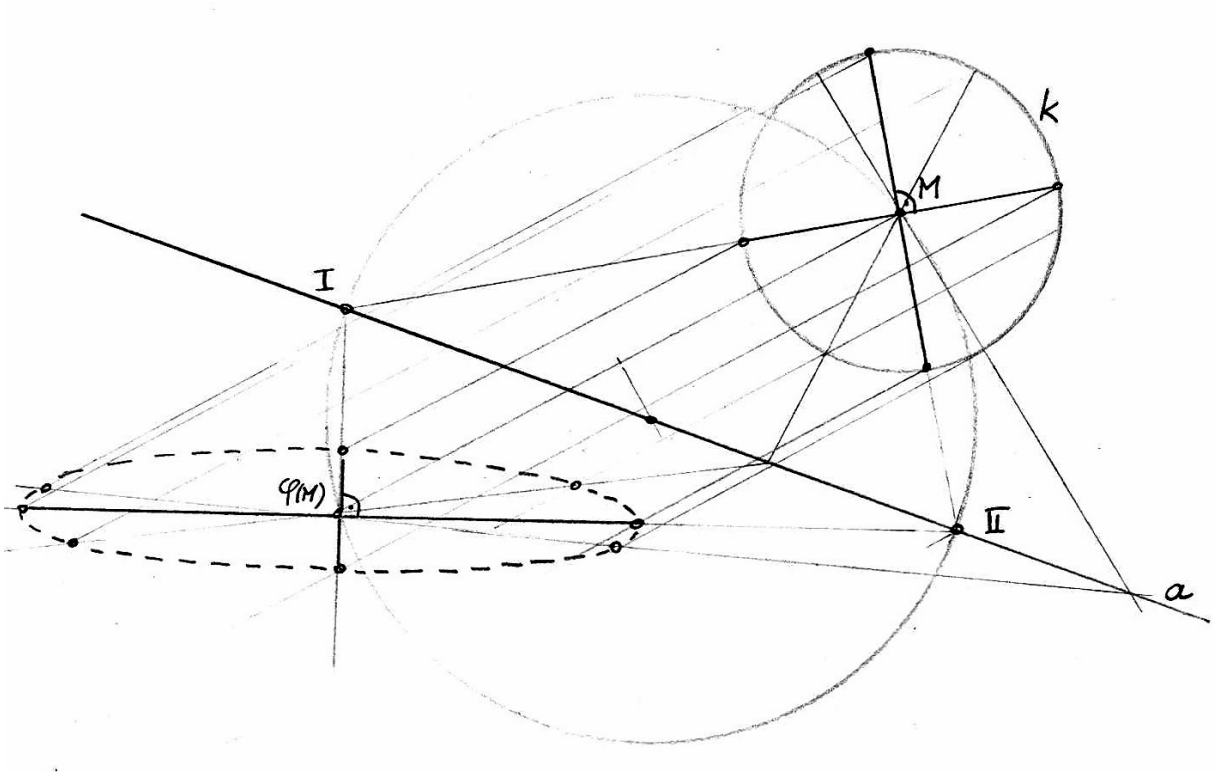
Ergebnis: Affinitätsachse a = h_1' und Affinitätsrichtung = Strecke B'(B').
Da a ⊥ Strecke B'(B'), handelt es sich um normale Affinität.

Zu 3. Das Bild eines geometrischen Objektes wird noch anschaulicher, wenn man Beleuchtungsverhältnisse berücksichtigt, d. h. Schatten eines Objektes konstruiert. Wir stellen uns Parallelbeleuchtung vor, die durch einen Strahl s des Parallelstrahlbündels vorgegeben sei.

Aufgabe:
Gegeben Dreieck A, B, C durch A(3, 1, 2), B(1, 6, 1), C(4, 4, 5), S(2.5, 0, 3), s = g(A, S)
Gesucht: Schlagschatten von ABC im Grundriss, Affinitätsachse und -richtung.



Hinweis: Man erhält den Schlagschattenpunkt C_1 als ersten Spurpunkt der Geraden g, die parallel zu s durch C verläuft.

Ergebnis:
Affinitätsachse a = e_1 = Spur der Ebene ε(A, B, C) und Affinitätsrichtung = s' = g(A', A_1).

Zu 4. **Aufgabe:**
Gegeben: Achse a, Richtung g(M, φ(M)), Kreis k um M
Gesucht: perspektiv affines Bild des Kreise k
Hinweis:
Wir beginnen die Konstruktion mit dem invarianten Rechtwinkelpaar, was uns Haupt- und Nebenachse der Ellipse liefert.