4.4 Grundaufgaben der Lage

Bei den Lageaufgaben geht es um die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Grundelementen (Punkte, Geraden, Ebenen). Sie können durch *Schneiden* und *Verbinden* mit dem Lineal gelöst werden. Wir behandeln im Folgenden acht Grundaufgaben. Durch Dualisierung entstehen vier Paare von Aufgabentypen.

Dualisierung im dreidimensionalen Raum
Satz
Vertauscht man in einer wahren Aussage über geometrische Sachverhalte des dreidimensionalen (projektiven) Raumes Punkte mit Ebenen und Schneiden mit Verbinden, so erhält man wieder eine wahre Aussage.

Beispiel
Axiom: Durch zwei verschiedene Punkte ist eine Gerade eindeutig bestimmt.
Dualisierte Aussage: Zwei verschiedene Ebenen schneiden sich in genau einer Geraden. (Im projektiven Raum schneiden sich parallele Geraden in einer uneigentlichen Geraden.)

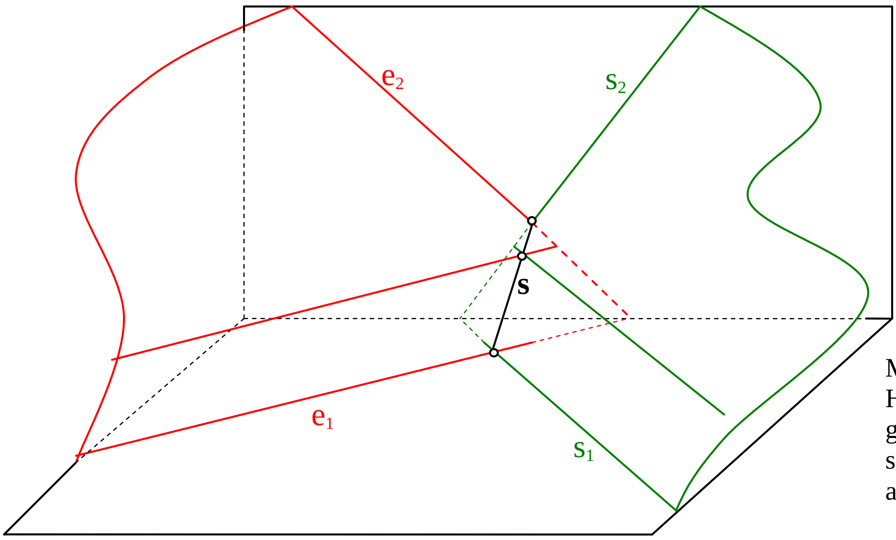
Lageaufgabe 1 ⟷ Verbindungsgerade zweier Punkte	**Lageaufgabe 5** Schnittgerade zweier Ebenen
Lageaufgabe 2 ⟷ Verbindungsebene einer Geraden und eines nicht inzidenten Punktes	**Lageaufgabe 6** Schnittpunkt einer Geraden und einer nicht inzidenten Ebene
Lageaufgabe 3 ⟷ Verbindungsebene zweier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt	**Lageaufgabe 7** Schnittpunkt zweier Geraden in einer gemeinsamen Ebene
Lageaufgabe 4 ⟷ Verbindungsebene dreier nicht auf einer Geraden liegenden Punkte	**Lageaufgabe 8** Schnittpunkt dreier nicht durch eine gemeinsame Gerade gehender Ebenen

Die Aufgaben eins bis vier beinhalten die bereits behandelte Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen in senkrechter Zweitafelprojektion. Weitere Objekte der Ebenen erhält man durch Angittern. Alle weiteren Lageaufgaben lassen sich auf diese acht Grundaufgaben zurückführen.

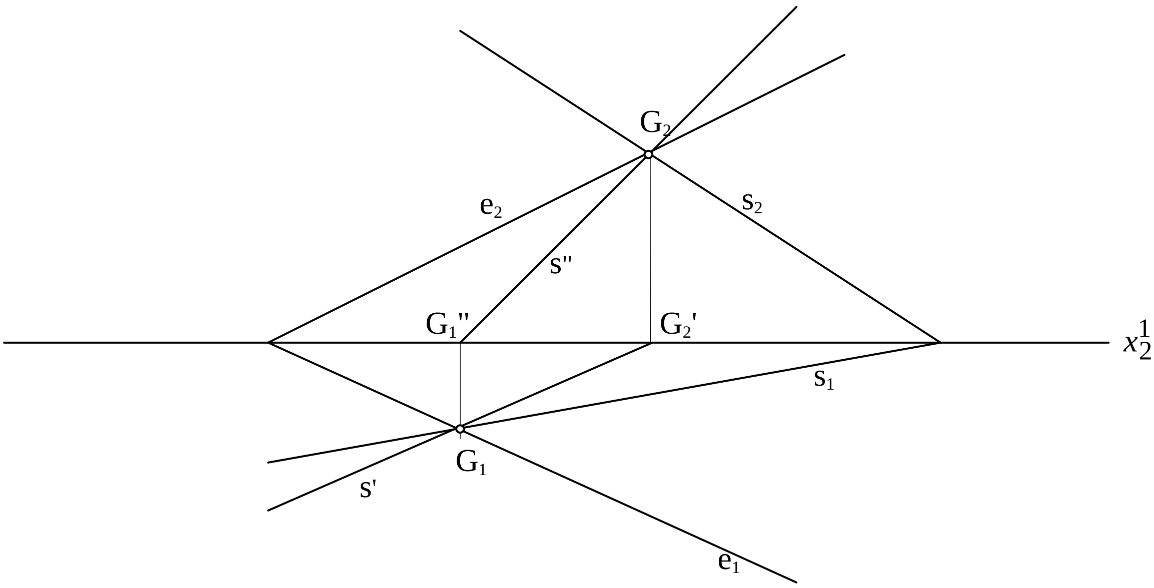
Vereinbarungen für Konstruktionsbeschreibungen

Operation	**Name des Operators**	**Kurz**	**Beispiel**
Wahl eines beliebigen Punktes	Wahloperator	W	W(P)
Ordner durch A' zur x_{12}-Achse	Ordneroperator	O	O(A', x_{12})
Verbindungsgerade durch $P \neq Q$	Linealoperator	L	L(P, Q)
Schnittpunkt zweier Geraden	Schnittoperator 1	S_1	S_1(g, h)
Parallele zu g durch $P \notin g$	Parallelenoperator	Par	Par(g, P)
Kreis um M mit Radius $r = \lvert PQ \rvert$	Zirkeloperator	Z	Z(M; $\overline{PQ}$)
Schnittpunkte Kreis – Gerade	Schnittoperator 2	S_2	S_2(k, g)
Schnittpunkte Kreis – Kreis	Schnittoperator 3	S_3	$S_3(k_1, k_2)$
Anwendung einer Lageaufgabe	Lageaufgabe i (i = 1, 2, …8)	LA i	LA 6 (g, ε)

Lageaufgabe 5 (Schnittgerade zweier Ebenen)
Gegeben: Ebenen ε_1 und ε_2 (z. B. durch ihre Spuren)
Gesucht Schnittgerade s: = $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$



Merke:
Höhenlinien
gleicher Kote
schneiden sich
auf s



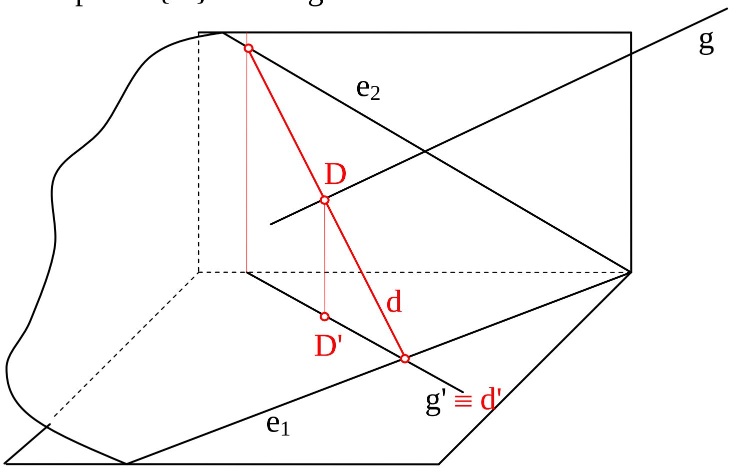
Konstruktionsbeschreibung (Algorithmus)

Eingabe $e_1, e_2, s_1, s_2, x_{12}$

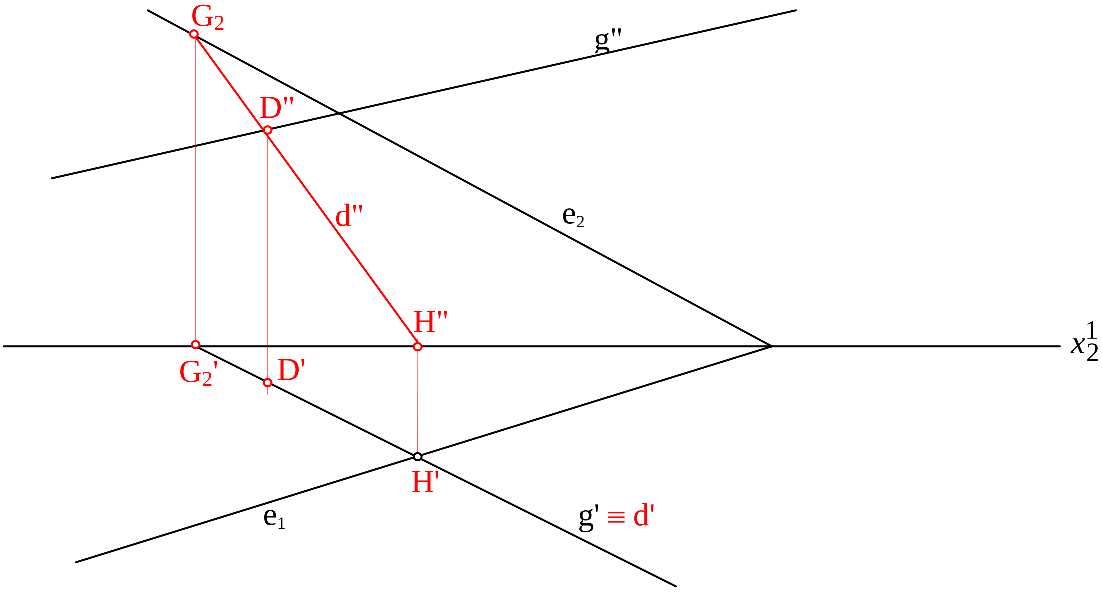
Verarbeitung
$G_1 := S_1(e_1, s_1)$
$G_2 := S_1(e_2, s_2)$
$o_1 := O(G_1, x_{12})$
$o_2 := O(G_2, x_{12})$
$G_1'' := S_1(o_1, x_{12})$
$G_2' := S_1(o_2, x_{12})$
$s' := L(G_1, G_2')$
$s'' := L(G_2, G_1'')$

Ausgabe s', s''

Lageaufgabe 6 (Schnittpunkt Gerade – Ebene)
Gegeben: Ebene ε, Gerade g $\not\subset$ ε
Gesucht: Schnittpunkt {D}: = ε ∩ g



Lösung:
Wir konstruieren eine Gerade d so, dass d' ≡ g' (oder d'' ≡ g'') und d ⊂ ε ⇒ {D} = g ∩ d



Konstruktionsbeschreibung

e_1, e_2, g', g'', x_{12}

↓

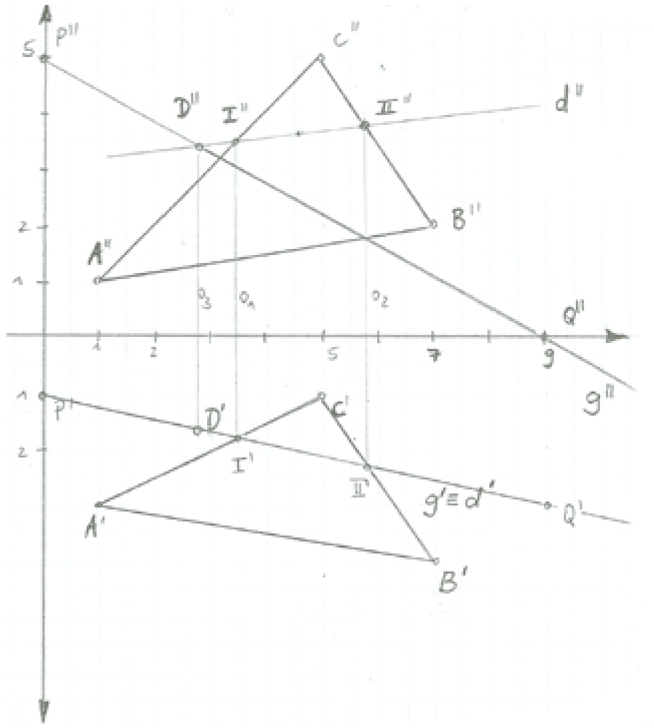
d': = g'
H': = S_1(d', e_1)
o_1: = O(H', x_{12})
H'': = S_1(o_1, x_{12})
G_2': = S_1(d', x_{12})
o_2: = O(G_2', x_{12})
G_2: = S_1(o_2, e_2)
d'': = L(H'', G_2)
D'': = S_1(d'', g'')
o_3: = O(D'', x_{12})
D': = S_1(d', o_3)

↓

D', D''

Aufgabe:
Gegeben: ε(A, B, C) mit A(3, 1, 1), B(4, 7, 2), C(1, 5, 5); g(P, Q) mit P(1, 0, 5), Q(3, 9, 0)
Gesucht: Durchstoßpunkt D von g durch ε.

Lösung:



Aufgabe:
Beschreiben Sie die Konstruktion mit Hilfe der oben eingeführten Symbolik.

Lageaufgabe 7 (Schnittpunkt Gerade – Gerade)
Diese Aufgabe wurde bereits im Kapitel 4.2.3 behandelt.

Lageaufgabe 8 (Schnittpunkt dreier Ebenen)
Gegeben: Ebenen α, β und γ
Gesucht: Schnittpunkt der drei Ebenen
Lösung (2 Möglichkeiten):

α, β, γ
↓
g: = LA 5(α, β)

h: = LA 5(β, γ)
P: = LA 7(g, h)

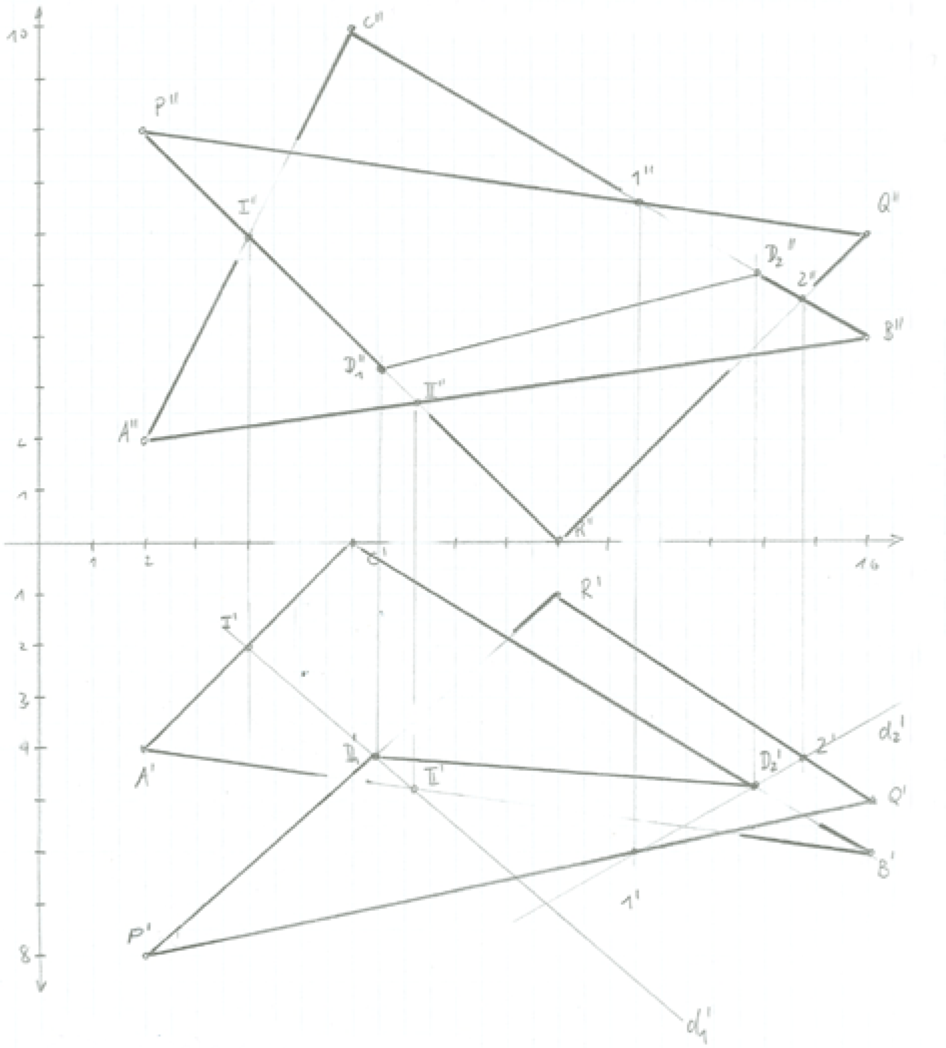
P: = LA 6(g, γ)

P

Anwendungsaufgabe: Verschneidungsfigur zweier Dreiecke

Gegeben: Zwei Dreiecke Δ(A, B, C) und Δ(P, Q, R) durch A(4, 2, 2), B(6, 16, 4), C(0, 6, 10), P(8, 2, 8), Q(5, 16, 6) und R(1, 10, 0).
Gesucht: Verschneidungsfigur

Lösung:



Konstruktionsbeschreibung

- D_1: = LA 6(g(P, R), ε(A, B, C))
- D_2: = LA 6(g(B, C), ε(P, Q, R))
- Sichtbarkeitsverhältnisse der windschiefen Geraden