

4.5 Grundaufgaben des Maßes

Wir werden im Folgenden acht Maßaufgaben (MA) behandeln. In jedem Fall geht es um die Ermittlung der wahren Größe oder wahren Gestalt der in senkrechter Mehrtafelprojektion dargestellten geometrischen Objekte.

MA 1 Länge einer Strecke

MA 2 Winkel zwischen zwei Geraden

MA 3 Gestalt einer ebenen Figur

MA 4 Abstand Punkt – Ebene (Normale)

MA 5 Abstand Punkt – Gerade (Normalebene)

MA 6 Abstand Gerade – Gerade (Gemeinlot)

MA 7 Winkel zwischen zwei Ebenen

MA 8 Winkel Gerade – Ebene

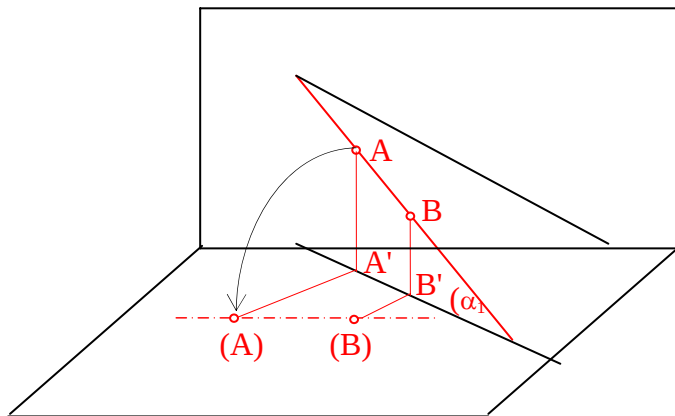
Maßaufgabe 1 (wahre Länge einer Strecke)

Den beiden Konstruktionsmethoden liegt folgender Satz zugrunde:

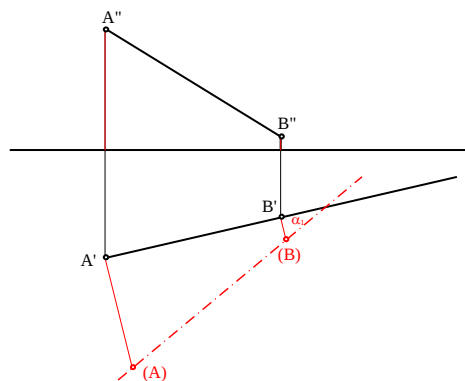
Eine Strecke $\overline{AB}$ erscheint bei Normalprojektion in wahrer Länge, wenn sie parallel zur Projektionsebene π verläuft (Spezialfall: $\overline{AB} \subset \pi$).

Daraus ergeben sich zwei Methoden: die *Trapezmethode*, durch die die Strecke in die Bildebene geklappt wird, und die *Drehkegelmethode*, bei der die Strecke durch Drehung in eine zur Bildebene parallele Lage gebracht wird.

Trapezmethode



Das Viereck $ABB'A'$ ist ein Trapez. Durch Drehung des Trapezes um die Gerade $g(A', B')$ in die Grundrissebene erhalten wir die gedrehten Punkte (A) und (B) . Die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist dann gleich der Länge der Strecke $\overline{(A)(B)}$.



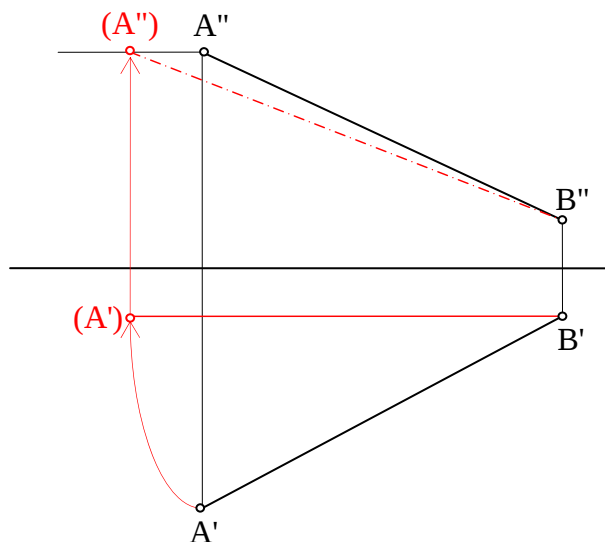
Diese Konstruktion liefert gleichzeitig die wahre Größe des *ersten Neigungswinkels* α_1 der Geraden $g(A, B)$, der folgendermaßen definiert ist: α_1 : = (nicht stumpfer) Winkel zwischen g und g' . Bei analoger Konstruktion im Aufriss erhält man den *zweiten Neigungswinkel* α_2 mit α_2 : = (nicht stumpfer) Winkel zwischen g und g'' .

Aufgabe:

Gegeben: zwei Punkte $A(3, 3, 4)$ und $B(2, 6, 1)$

Gesucht: Wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ durch Konstruktion nach der Trapezmethode und durch Berechnung (Ergebnis: $|AB| \approx 4,36$).

Methode des Paralleldrehens (Drehkegelverfahren¹)



Konstruktionsbeschreibung

A', A'', B', B'', x_{12}

$p_1 := \text{Par}(B', x_{12})$

$k := Z(B', |A'B'|)$

$(A') := S_2(p_1, k)$

$p_2 := \text{Par}(A'', x_{12})$

$o := O((A'), x_{12})$

$(A'') := S_1(o, p_2)$

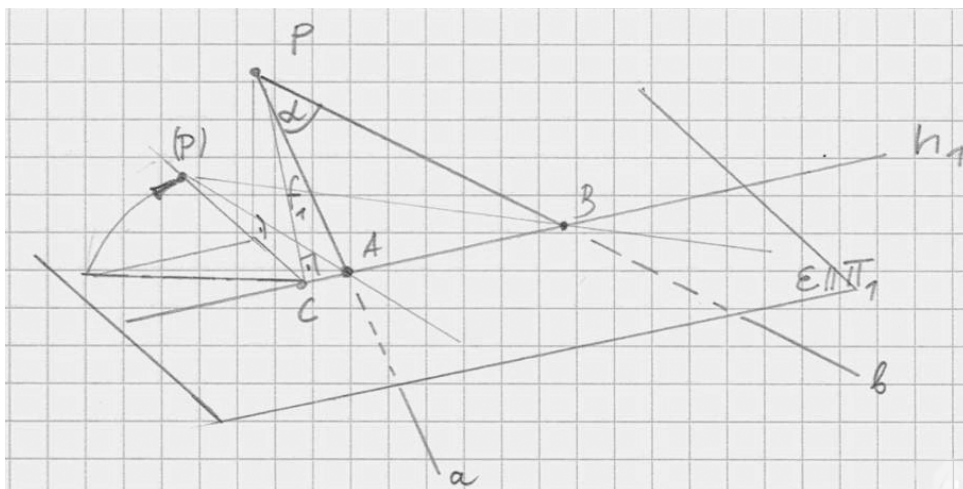
$l = |(A'')B''| = |AB|$

Maßaufgabe 2 (Wahre Größe eines Winkels)

Gegeben: zwei Strahlen a, b mit gemeinsamen Anfangspunkt P

Gesucht: wahre Größe des durch a, b eingeschlossenen Winkels α .

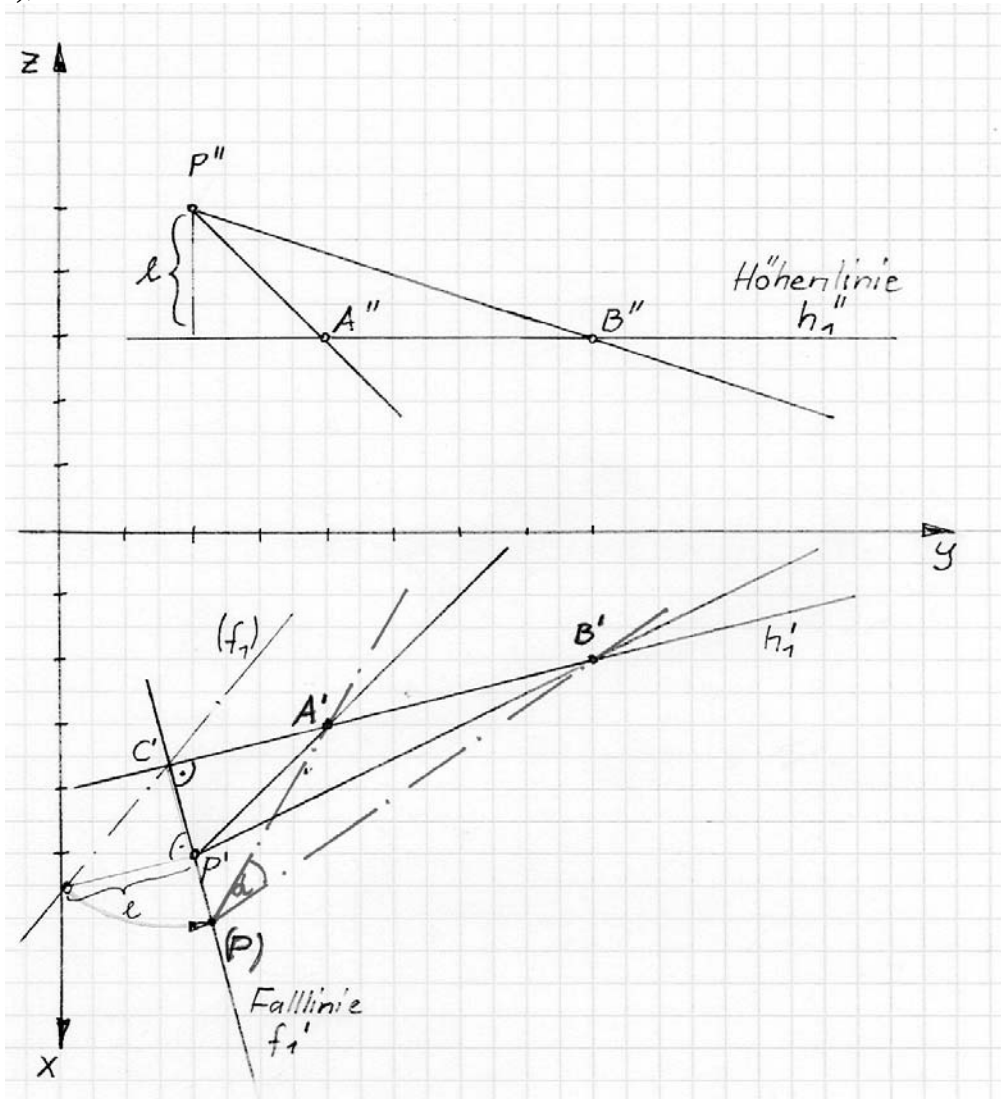
Lösungsidee: Höhenlinie h_1 in Ebene $\varepsilon(a, b)$ legen, Winkel α um h_1 in parallele Lage zu π_1 drehen; im Grundriss erhält man die wahre Größe des Winkels α .



¹ Nach Gaspard Monge (1746 – 1818)

Aufgabe:

Gegeben: Winkel α durch die Strahlen $a = \overrightarrow{PA}$ und $b = \overrightarrow{PB}$, wobei $P(5, 2, 5)$, $A(3, 4, 3)$ und $B(2, 8, 3)$; Gesucht: Wahre Größe des Winkels α .



Konstruktionsbeschreibung

$P', P'', A', A'', B', B'', x_{12}$

$h_1'' := L(A'', B'')$

$h_1' := L(A', B')$

$f_1' := \text{Lot}(P', h_1')$

$C' := S_1(f_1', h_1')$

$x := \text{MA } 1(\overline{PC}) \quad (x \in \mathbb{R})$

$k := Z(C', x)$

$(P) := S_2(k, f_1')$

$|\alpha| := |\angle(A', (P), B')| \quad (|\alpha| \in \mathbb{R})$

$|\alpha| \approx 25^\circ$

Maßaufgabe 3 (Wahre Gestalt einer ebenen Figur)

Diese Aufgabe wird analog zur Maßaufgabe 2 gelöst.

Maßaufgabe 4 (Abstand Punkt – Ebene)

Gegeben: Ebene ε und Punkt P , Gesucht: Abstand von P zu ε

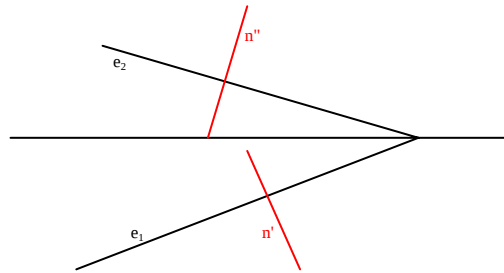
Lösungsidee:

1. Lot n von P auf ε fallen (Konstruktion der Normalen)
2. Durchstoßpunkt D von n durch ε ermitteln (LA 6)
3. Abstand $|PD|$ ermitteln (MA 1)

Konstruktion der Normalen

Definition: n ist eine Normale zur Ebene ε : $\Leftrightarrow n \perp \varepsilon$

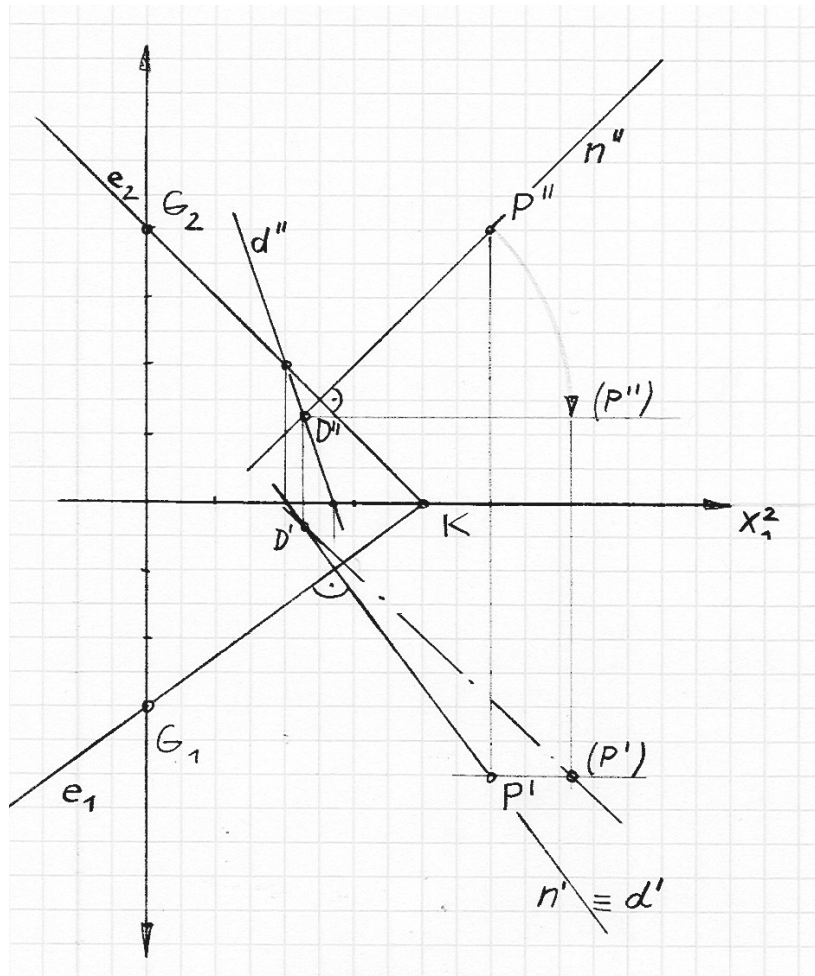
$\Rightarrow n \perp g$ für alle Geraden $g \subset \varepsilon \Rightarrow n \perp e_1$ und $n \perp e_2 \Rightarrow n' \perp e_1$ und $n'' \perp e_2$



Aufgabe:

Gegeben: Ebene $\varepsilon = \varepsilon(e_1, e_2)$ (z. B. durch Knotenpunkt $K(0, 4, 0)$, Spurpunkte $G_1(3, 0, 0)$ und $G_2(0, 0, 4)$) und Punkt $P \notin \varepsilon$ (z. B. $P(4, 5, 4)$).

Gesucht: Abstand von P zu ε .



Ergebnis: Abstand von P zu $\varepsilon = |D'(P')| \approx 5,4$.

Konstruktionsbeschreibung

e_1, e_2, P
↓
 $n := \text{Normale}(P, \varepsilon(e_1, e_2))$
 $D := \text{LA } 6(n, \varepsilon)$
 $|DP| := \text{MA } 1(\overline{PD})$
↓
 $|DP|$

Maßaufgabe 5 (Abstand Punkt – Gerade)

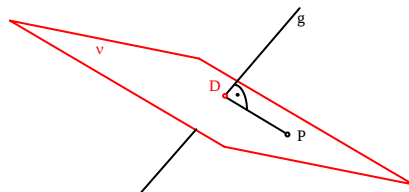
Seien P ein Punkt und g eine Gerade. Dann ist der Abstand von P zu g wie folgt definiert:
 $|Pg| := |PD|$, wobei D der Lotfußpunkt des Lotes von P auf g .

Lösungsidee:

1. zu gegebener Geraden g und gegebenem Punkt P *Normalebene* v mit $g \perp v$ und $P \in v$ konstruieren
2. Durchstoßpunkt D von g durch v bestimmen
3. Abstand von P zu D ermitteln

Eigenschaften der Normalebene

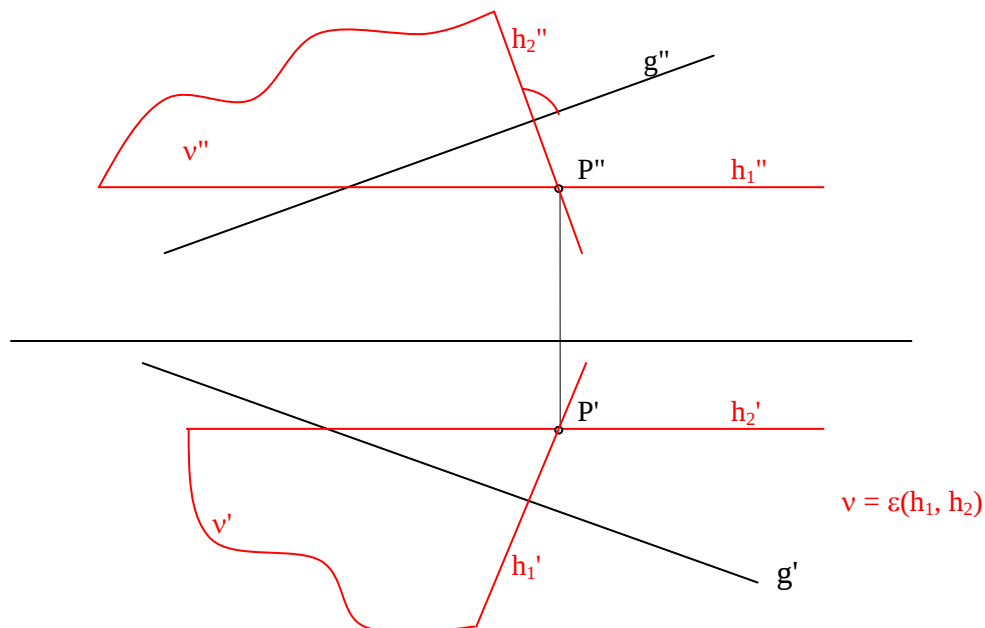
$g \perp v \Rightarrow g \perp h$ für alle Geraden h mit $h \subset v$
 $\Rightarrow g \perp h_1, h_2, e_1, e_2$ (h_1 Höhenlinie, h_2 Frontlinie, e_1 und e_2 Spuren von v)
 $\Rightarrow g' \perp h_1'$ und $g'' \perp h_2''$



Aufgabe:

Gegeben: Gerade g und Punkt P in senkrechter Zweitafelprojektion

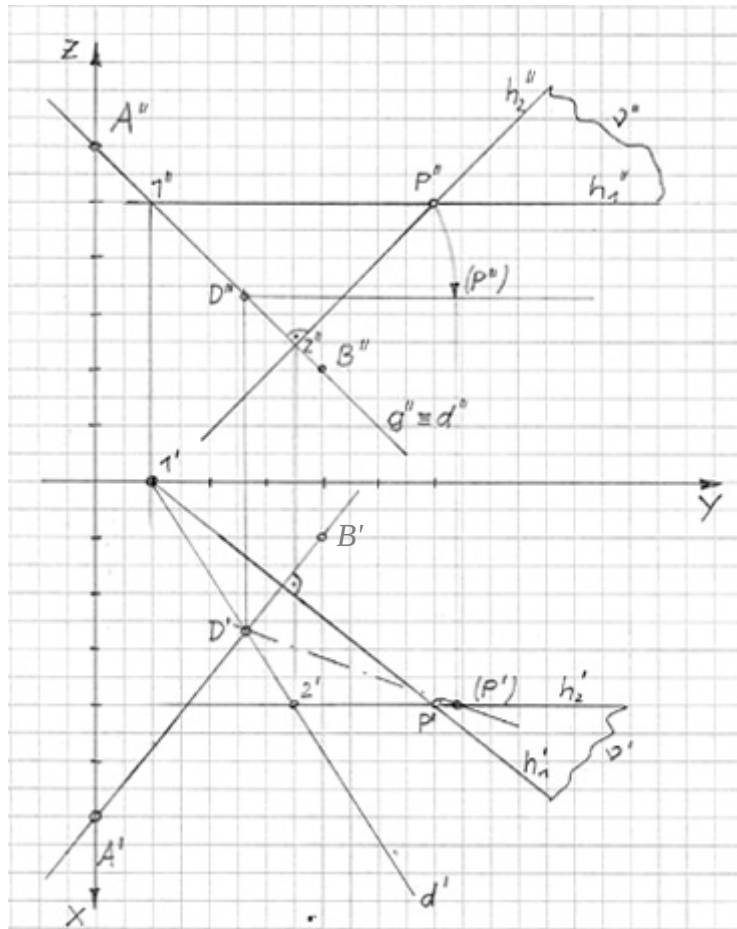
Gesucht: Normalebene v zu g durch den Punkt P



Aufgabe:

Gegeben: Gerade g durch $A(6, 0, 6)$ und $B(1, 4, 2)$ und Punkt $P(4, 6, 5)$

Gesucht: Abstand von P zu g

**Konstruktionsbeschreibung**

P, A, B

$g := L(A, B)$

$h_1' := \text{Lot}(P', g')$

$h_1'' := \text{Par}(P'', x_{12})$

$h_2' := \text{Par}(P', x_{12})$

$h_2'' := \text{Lot}(P'', g'')$

$v := \text{Ebene}(h_1, h_2)$

$D := LA\ 6\ (g, v)$

$|PD| := MA\ 1\ (\overline{PD})$

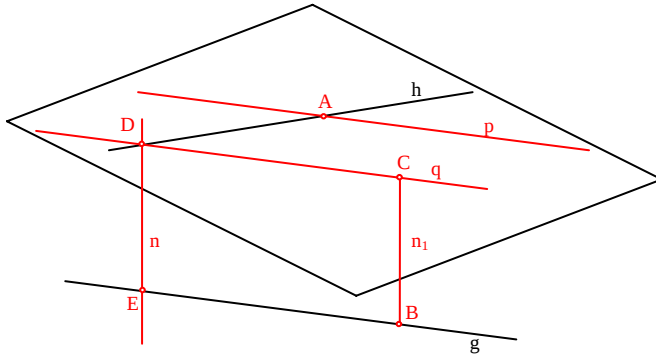
$|PD| \approx 4$

Maßaufgabe 6 (Abstand Gerade – Gerade)

Gegeben: zwei windschiefe Geraden g und h

Gesucht: Abstand der beiden Geraden

Lösungsidee: diejenige Ebene λ betrachten mit $g \parallel \lambda$ und $h \subset \lambda$, *Gemeinlot* n ($=$ diejenige Gerade mit $n \perp \lambda$ und n schneidet h und g) konstruieren, Abstand $|DE|$ der beiden Schnittpunkte D bzw. E ist der gesuchte Abstand der beiden Geraden.



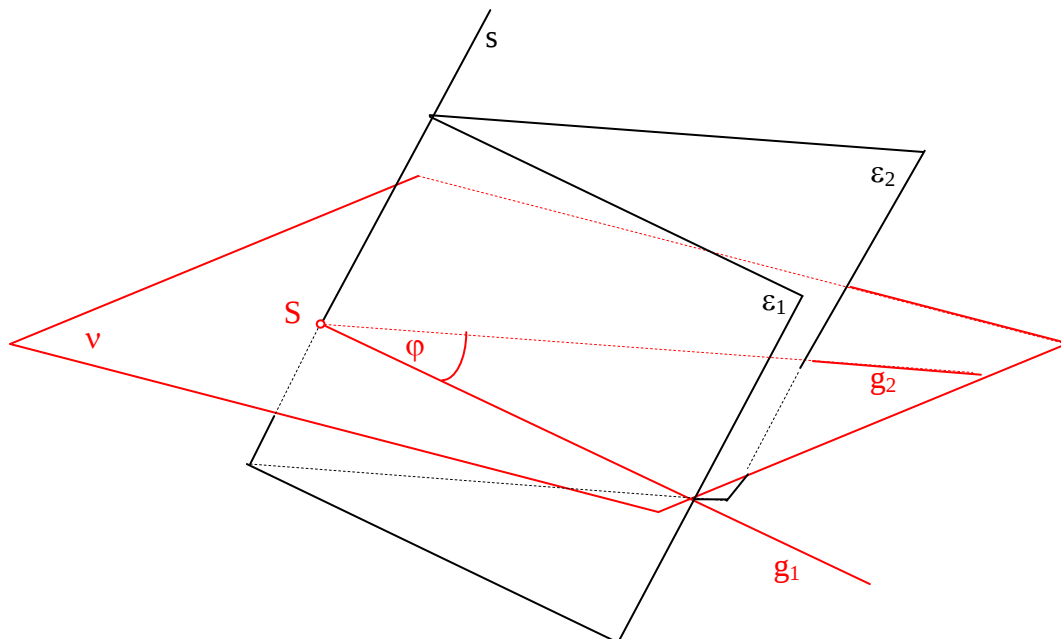
Konstruktionsbeschreibung

g, h
 $\downarrow$
 $A := W(P, P \in h)$
 $p := \text{Par}(A, g)$
 $\lambda := \varepsilon(h, p)$
 $B := W(P, P \in g)$
 $n_1 := \text{Lot}(B, \lambda)$
 $C := \text{LA } 6(n_1, \lambda)$
 $q := \text{Par}(C, g)$
 $D := S_1(q, h)$
 $n := \text{Par}(n_1, D)$
 $E := S_1(n, g)$
 $|ED| := \text{MA } 1(\overline{ED})$
 $\downarrow$
 $n, |ED|$

Maßaufgabe 7 (Winkel Ebene – Ebene)

Seien ε_1 und ε_2 zwei Ebenen. Wir definieren Winkel $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \text{Winkel } \varphi(g_1, g_2)$,

wobei $g_1 = \varepsilon_1 \cap v$, $g_2 = \varepsilon_2 \cap v$ und v eine Normalebene zu $s = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$.



1. Lösungsweg

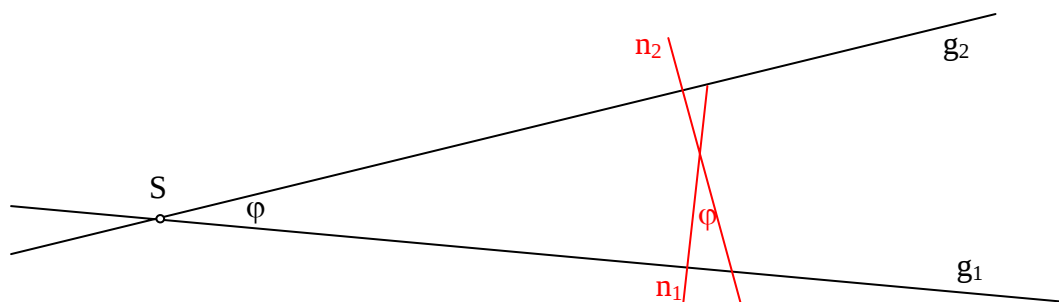
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$
 $\downarrow$
 $s := \text{LA } 5 (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
 $S := W(P, P \in s)$
 $v := \text{Normalebene}(s, S)$
 $g_1 := \text{LA } 5 (\varepsilon_1, v)$
 $g_2 := \text{LA } 5 (\varepsilon_2, v)$
 $|\varphi| := \text{MA } 2 (\text{Winkel}(g_1, g_2))$
 $\downarrow$
 $|\varphi|$

2. Lösungsweg

Unter Ausnutzung des folgenden Satzes der Stereometrie erhält man eine Konstruktion mit geringerem Aufwand.

Satz

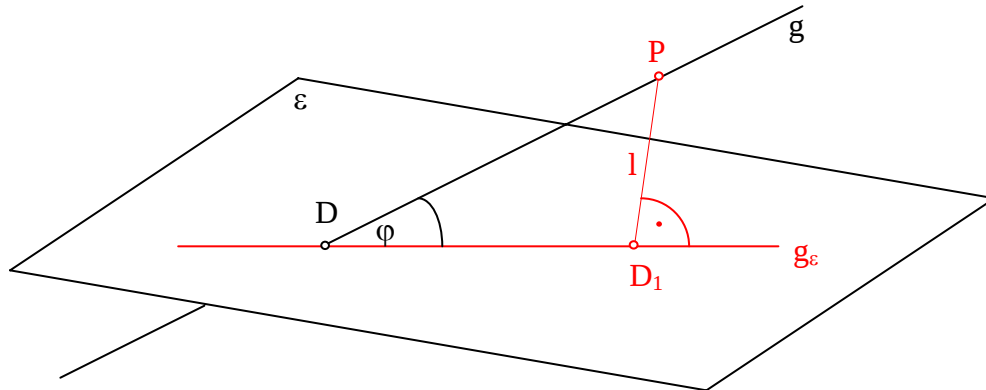
Zwei beliebige Normalen n_1 und n_2 der Ebenen ε_1 bzw. ε_2 schließen denselben Winkel ein wie die Ebenen selbst. (Beweis mittels Ähnlichkeit von Dreiecken)



$\varepsilon_1, \varepsilon_2$
 $\downarrow$
 $P := W(P)$
 $n_1 := \text{Normale } (P, \varepsilon_1)$
 $n_2 := \text{Normale } (P, \varepsilon_2)$
 $|\varphi| := \text{MA } 2 (\text{Winkel}(n_1, n_2))$
 $\downarrow$
 $|\varphi|$

Maßaufgabe 8 (Winkel Gerade – Ebene)

Seien ε eine Ebene und g eine Gerade. Wir definieren Winkel $\varphi(g, \varepsilon) :=$ derjenige (nicht-stumpfe) Winkel φ , den g mit dem Normalriss g_ε von g auf ε einschließt.



1. Lösungsweg

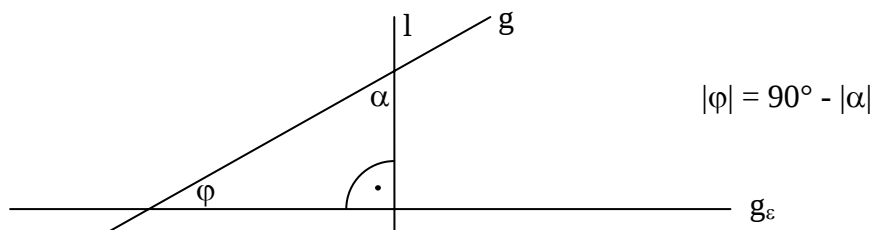
ε, g
 $\downarrow$
 $D := \text{LA } 6 (\varepsilon, g)$
 $P := \text{W}(P, P \in g)$
 $l := \text{Lot}(P, \varepsilon)$
 $D_1 := \text{LA } 6 (l, \varepsilon)$
 $g_\varepsilon := L (D_1, D)$
 $|\varphi| := \text{MA } 2 (\text{Winkel}(g, g_\varepsilon))$
 $\downarrow$
 $|\varphi|$

2. Lösungsweg

Unter Ausnutzung des folgenden Satzes der Stereometrie erhält man eine Konstruktion mit geringerem Aufwand.

Satz

Der Winkel α , den irgendein Lot l der Ebene ε mit der Geraden g bildet, ist das Komplement des Winkels zwischen g und ε .



ε, g
 $\downarrow$
 $P := \text{W}(P, P \in g)$
 $l := \text{Lot}(P, \varepsilon)$
 $|\alpha| := \text{MA } 2 (\text{Winkel}(l, g))$
 $|\varphi| := 90^\circ - |\alpha|$
 $\downarrow$
 $|\varphi|$