2 Relationen und Abbildungen

Grundlagen

Definition R ist (binäre) **Relation** zwischen M und N: $\Leftrightarrow R \subseteq M \times N$.
R ist (binäre) **Relation** in M: $\Leftrightarrow R \subseteq M \times M$.

Schreibweisen: $(x, y) \in R$ oder $x\ R\ y$ oder $R(x, y)$
Beispiele:
1. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
2. M = Menge aller Menschen; R: ‚ist Vater von'
3. M = Menge aller natürlichen Zahlen = $\{0, 1, 2, ...\}$; R: $\leq$-Relation
4. Inklusion von Mengen

Definitionen Eigenschaften von Relationen
Seien $R \subseteq M \times M$ und x, y, z Elemente aus M.
R ist **reflexiv**: $\Leftrightarrow$ f. a. x gilt: $x\ R\ x$.
R ist **irreflexiv**: $\Leftrightarrow$ für kein x gilt $x\ R\ x$.
R ist **symmetrisch**: $\Leftrightarrow$ f. a. x, y gilt: $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$.
R ist **antisymmetrisch**: $\Leftrightarrow$ f. a. x, y gilt: $x\ R\ y$ und $y\ R\ x \Rightarrow x = y$.
R ist **transitiv**: $\Leftrightarrow$ f. a. x, y, z gilt: $x\ R\ y$ und $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$.
R ist **linear**: $\Leftrightarrow$ f. a. x, y gilt: $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$.

(Aufgabe: Einordnung der obigen Beispiele)

Äquivalenzrelationen

Definition
Eine Relation R ist **Äquivalenzrelation** in M: $\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Beispiele:
1. M = Menge aller Menschen; R: ‚ist am gleichen Tag geboren wie'
2. M = Menge aller natürlichen Zahlen; $x\ R\ y$: $\Leftrightarrow$ x und y lassen bei Division durch 3 denselben Rest
3. $M = \{1, 2, 3, 4 ,5\}$;
   Aufgabe: Man konstruiere eine Äquivalenzrelation, die (1, 4), (2, 3) und (2, 5) enthält.
   Lösung: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 5), (5, 3)\}$.
4. M = Menge aller Geraden einer Ebene; R: Parallelgleichheit

Definition Sei R Äquivalenzrelation in M, $x \in M$.
Äquivalenzklasse $\boldsymbol{R[x]}$: $= \{y: (x, y) \in R\}$.

Beispiele:
zu 1. x = Frau Köhler, $R[x]$ = Menge aller Menschen, die am 29.7. geboren sind
zu 2. $x = 17$, $R[x] = \{2, 5, 8, 11, ..., 17, ...\}$
zu 3. $x = 3$, $R[x] = \{3, 5, 2\}$
Definition **Restsystem** von M nach R $\boldsymbol{M/R}$:= $\{R[x]: x \in M\}$.

Beispiele:
zu 1. $M/R = \{[1.1.], [2.1.], ..., [29.7.], ..., [31.12.]\}$ (366 Klassen)
zu 2. $M/R = \{[0], [1], [2]\}$
zu 3. $M/R = \{\{3, 5, 2\}, \{1, 4\}\}$

Definition ***Z*** ist **Zerlegung** der Menge M in Teilmengen $M_1, M_2..., M_k \in Z$:
(i) für $i = 1, 2, ..., k$ gilt $M_i \neq \emptyset$;
(ii) $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$;
(iii) $M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_k = M$.

Beispiel:
$M = \{a, b, c, d, e\}$, $Z = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d, e\}\}$.

Hauptsatz über Äquivalenzrelationen Wenn R eine Äquivalenzrelation in M ist, so liefert das Restsystem M/R eine Zerlegung von M. Umgekehrt existiert zu jeder Zerlegung Z von M eine Äquivalenzrelation R', so dass $M/R' = Z$.
(ohne Beweis)

Beispiel für die Umkehrung:
$M = \{a, b, c, d, e\}$, $Z = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d, e\}\}$. $(x, y) \in R'$, falls es eine Menge $M' \in Z$ gibt, so dass $x, y \in M'$, d. h. $R' = \{(a, a), (c, c), (a, c), (c, a), (b, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$. R' ist symmetrisch, reflexiv und transitiv!

Ordnungsrelationen

Seien M Menge, R Relation in M.
Definition R ist **Ordnung(srelation)** in M: $\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Beispiele:
1. M = Menge der reellen Zahlen, $\leq$–Relation
2. X beliebige Menge, M = Potenzmenge $P(X)$, Inklusion
3. M = Menge der natürlichen Zahlen, Teilbarkeitsrelation

Anmerkung: Bei den Beispielen 2 und 3 gibt es auch unvergleichbare Elemente

Definition R ist **Totalordnung** in M: $\Leftrightarrow$ R ist Ordnung und R ist linear.

Abbildungen (Funktionen)

Seien M, N Mengen.
Definition f ist **Abbildung** aus M in N: $\Leftrightarrow f \subseteq M \times N$, und f ist eindeutig, d. h. zu jedem $x \in M$ gibt es höchstens ein $y \in N$ mit $(x, y) \in f$. Schreibweise: $f(x) = y$.

Definition
Definitionsbereich $\boldsymbol{D(f)}$:= $\{x\colon x \in M$, es existiert $y \in N$ mit $f(x) = y\}$,
Elemente heißen **Argumente**;
Wertebereich $\boldsymbol{W(f)}$:= $\{y\colon y \in N$, es existiert $x \in M$ mit $f(x) = y\}$,
Elemente heißen **Werte**.

Ist $D(f) = M$, so schreibt man: ***f*: *M* ® *N***.

Beispiele:
1. $M = \{a, b, c, d, e\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $f = \{(b, 2), (c, 3), (d, 2), (e, 2)\}$.
   Schreibweisen: z. B. $f(b) = 2$, $f(d) = 2$ oder Darstellung von f durch Wertetabelle

x	b	c	d	e
y	2	3	2	2

2. Sei IR die Menge der reellen Zahlen f: IR ® IR mit $f(x) = x^2$.
3. f: IR$^+$ ® IR, $f(x) = \sqrt{x}$.
4. Sei IN die Menge der natürlichen Zahlen, f: IN $\times$ IN $\rightarrow$ IN mit $f(m, n) = m + n$.

Definitionen
f ist Abbildung **aus** M: $D(f) \subseteq M$;
f ist Abbildung **von** M: $D(f) = M$;
f ist Abbildung **in** N: $W(f) \subseteq N$;
f ist Abbildung **auf** N: $W(f) = N$.

f ist **eineindeutige** (**1-1-**)Abbildung aus M in N: $\Leftrightarrow f$ ist eindeutig, und zu jedem $y \in N$ existiert höchstens ein $x \in M$ $\Leftrightarrow$ (f. a. $x, y \in D(f)$ gilt: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$).
(Beispiel: $f(x) = x^2$ ist keine 1-1-Abbildung.)

Definitionen
f ist **surjektiv** $:\Leftrightarrow f$ ist Abbildung aus M auf N;
f ist **injektiv** $:\Leftrightarrow f$ ist 1-1-Abbildung von M in N;
f ist **bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ ist surjektiv und injektiv.

Definition Zu einer 1-1-Abb. f existiert die **inverse Abbildung** $\boldsymbol{f^{-1}}$: = $\{(y, x)\colon y = f(x)\}$.
(graphisch: Spiegelung an der Geraden $y = x$)

Definition Seien $g\colon M \rightarrow N$ und $f\colon N \rightarrow P$. Unter der **Verkettung** (**Komposition**, **Hintereinanderausführung**) versteht man folgende Abbildung:
$\boldsymbol{f \circ g}$: = $\{(x, z)\colon x \in M, z \in P$, es existiert ein $y \in N$ mit $g(x) = y$ und $f(y) = z\}$, also $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Beispiele:

1. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin x^2$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x^2}{4} - 17 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 17}$, $(g \circ f)(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{4} - 17 = \frac{x}{4} - 17$.

Aufgabe: Definitions- und Wertebereiche der Verkettungen bestimmen.

Satz (Eigenschaften der Verkettung)

(1) Seien h: $M \to N$, g: $N \to P$ und f: $P \to Q$. Dann gilt das Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
(2) Für alle Abbildungen f gilt: $f \circ id = id \circ f = f$, wobei $id(x) = x$ f. a. x.
(3) Die Hintereinanderausführung von 1-1-Abbildungen ist eineindeutig.
(4) Die Hintereinanderausführung von surjektiven Abbildungen ist surjektiv.
(5) Sei f bijektiv. Dann gilt $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.
(6) Sind f und g 1-1-Abbildungen, dann gilt $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Beweis von (6):
Sei $(x,z) \in f \circ g \Rightarrow (z,x) \in (f \circ g)^{-1}$, und es existiert ein y mit $g(x) = y$ und $f(y) = z \Rightarrow g^{-1}(y) = x$ und $f^{-1}(z) = y \Rightarrow (z,x) \in g^{-1} \circ f^{-1}$, weil ein y existiert mit $f^{-1}(z) = y$ und $g^{-1}(y) = x$. Die umgekehrte Richtung wird analog bewiesen.

Zusammenfassung

Mengen *M, N*
(Relationen: =, $\subseteq$; Operationen $\cup$, $\cap$, \, Komplementbildung; Kreuzprodukt)

↓

binäre Relationen
$R \subseteq M \times M$ (bzw. $R \subseteq M \times N$)

Äquivalenzrelationen
reflexiv
transitiv
symmetrisch

Ordnungsrelationen
reflexiv
transitiv
antisymmetrisch

↓

Totalordnungen
lineare Ordnungen

Abbildungen
eindeutig

↓

1-1-Abbildungen
eineindeutig