

6 Grundbegriffe der Graphentheorie

Zur anschaulichen Darstellung von Objekten und Zusammenhängen zwischen ihnen werden oft graphische Hilfsmittel benutzt (z. B. Punkte, Strecken, Pfeile, Bezeichnungen).
Beispiele: Stadtpläne, Schienennetze, Wasserleitungspläne, Schaltpläne.

6.1 Grundbegriffe

Definition $G = (V, E)$ ist ein **Graph**: $\Leftrightarrow V$ ist nichtleere Menge, E ist beliebige Menge mit $V \cap E = \emptyset$, wobei jedem $e \in E$ eindeutig ein Paar $(x, y) \in V^2$ zugeordnet ist.

V (vertex) = Menge der Knoten

E (edge) = Menge der Kanten

Eigenschaften von Graphen:

G ist **ungerichtet**: $\Leftrightarrow$ das jedem $e \in E$ zugeordnete Knotenpaar ist ungeordnet,
Bezeichnung: $e = (x, y)$; x, y sind die Endpunkte von e

G ist **gerichtet**: $\Leftrightarrow$ das jedem $e \in E$ zugeordnete Knotenpaar ist geordnet,
Bezeichnung: $e = [x, y]$ ist gerichtete Kante = Bogen

G ist **endlich**: $\Leftrightarrow V$ und E sind endlich

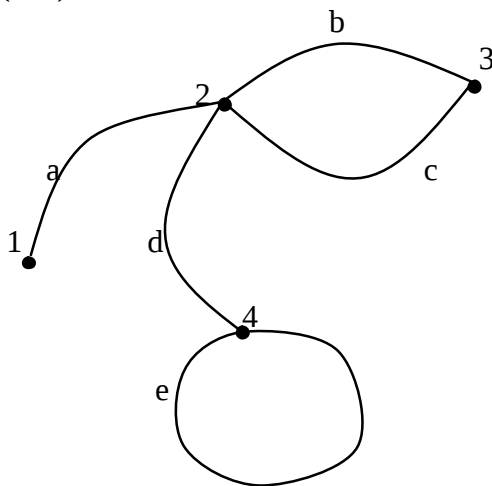
e ist **Schlinge**: $\Leftrightarrow e = (x, x)$

e, f sind **parallel**: $\Leftrightarrow e, f$ ist dasselbe Knotenpaar zugeordnet

G ist **schlicht**: $\Leftrightarrow G$ ist schlingenfrei und hat keine parallelen Kanten

Beispiel:

$G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{a, b, c, d, e\}$ mit $a = (1, 2)$, $b = (2, 3)$, $c = (2, 3)$, $d = (2, 4)$, $e = (4, 4)$.

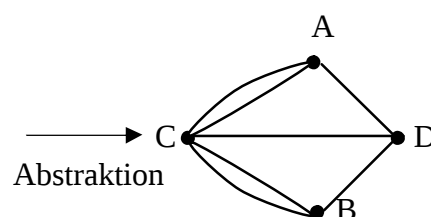
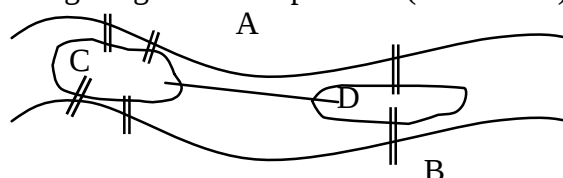


Bemerkung:

Die geometrische Darstellung eines Graphen ist nicht eindeutig.

Anwendungen

a) Königsberger Brückenproblem (Euler 1736)



Problem: Kann man von einer der vier Landseiten A, B, C oder D ausgehend alle Brücken so durchlaufen, dass man über jede genau einmal geht und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

- b) Bestimmung von kürzesten Wegen.
- c) Vierfarbenproblem: Reichen vier Farben aus, um die Gebiete jedes ebenen Graphen so zu färben, dass zwei Gebiete, deren Ränder eine Kante gemeinsam haben, verschiedene Farben erhalten? (Appel und Haken lieferten 1977 einen positiven aber umstrittenen Computerbeweis.)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $x, y \in V, e \in E$.

x und e sind **inzident**: $\Leftrightarrow$ Es existiert ein Knoten y , so dass $e = (x, y)$.

x und y sind **adjazent**: $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Kante e , so dass $e = (x, y)$.

$d(x)$ ist der **Grad** (die **Valenz**) des Knotens x : $\Leftrightarrow d(x) = \text{Anzahl der mit } x \text{ inzidenten Kanten}$ (Schlingen werden doppelt gezählt).

Hilfssatz 1

Seien $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2 \cdot |E| = 2 \cdot m.$$

Beweis: Jede Kante e_j inzidiert mit genau zwei Knoten, d. h. die m Kanten inzidieren zusammen mit $2m$ Knoten.

Hilfssatz 2

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades eine gerade Zahl.

Beweis: Dazu zerlegen wir die Summe der Knotengrade wie folgt in zwei Summen:

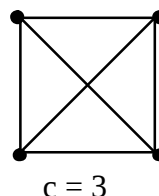
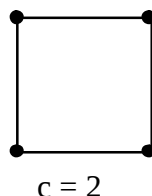
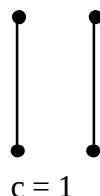
$$\sum_{k=1}^n d(x_k) = \sum_{d(x_k) \text{ gerade}} d(x_k) + \sum_{d(x_k) \text{ ungerade}} d(x_k).$$

Die erste Summe ist eine gerade Zahl ($= 2m$ nach Hilfssatz 1). Die zweite Summe ist auch eine gerade Zahl, weil sie Summe von geraden Zahlen ist. Mithin muss die dritte Summe auch eine gerade Zahl sein. Daraus folgt, dass die dritte Summe eine gerade Anzahl von Summanden haben muss.

Definition Der Graph $G = (V, E)$ ist **regulär** vom Grad c : $\Leftrightarrow$ Für alle Knoten x aus V gilt: $d(x) = c$.

Beispiele:

$$|V| = 4$$



Definitionen

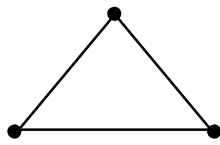
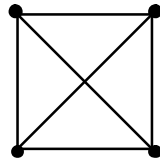
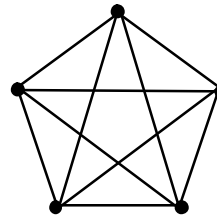
Der Knoten x ist **isoliert**: $\Leftrightarrow d(x) = 0$.

Der Knoten x ist **hängend**: $\Leftrightarrow d(x) = 1$.

Der Graph G ist **Nullgraph**: $\Leftrightarrow E = \emptyset$.

Der Graph G ist **vollständig**: $\Leftrightarrow$ Für alle Knoten x, y aus V mit $x \neq y$ existiert eine Kante e , so dass $e = (x, y)$. Wenn $|V| = n$, dann wird der vollständige Graph mit K_n bezeichnet.

Beispiele für vollständige Graphen:

 K_3  K_4  K_5

Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und m Kanten (ohne Schlingen),
 $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Inzidenzmatrix $Z = (z_{ik})_{i=1, \dots, n, k=1, \dots, m} = \begin{cases} 1, & \text{falls der Knoten } x_i \text{ inzident mit der Kante } e_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Eigenschaften der Inzidenzmatrix:

- a) Anzahl der Einsen in einer Zeile = $d(x_i) = \sum_{k=1}^m z_{ik}$.
- b) Anzahl der Einsen in einer Spalte = 2.
- c) Gleiche Spalten entsprechen parallelen Kanten.

Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und m Kanten (ohne parallele Kanten).

Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})_{i, j=1, \dots, n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_i \text{ und } x_j \text{ adjazent sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Eigenschaften der Adjazenzmatrix:

- a) A ist eine symmetrische Matrix, wenn der Graph G ungerichtet ist.
- b) G ist schlingenfrei genau dann, wenn $a_{ii} = 0$ für alle i .
- c) Wenn G schlingenfrei ist, so ist die Anzahl der Einsen in der i . Zeile gleich $d(x_i)$.

6.2 Wege und Kreise

Definitionen Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Die Kanten $e_1, e_2, \dots, e_k$ bilden eine **Kantenfolge**, wenn für alle $i = 2, 3, \dots, k-1$ die Kante e_i einen Knoten mit e_{i-1} und einen mit e_{i+1} gemeinsam hat.

Kantenzug: = Kantenfolge, bei der alle Kanten verschieden sind

Geschlossener Kantenzug: = Kantenzug, der mit demselben Knoten beginnt und endet

Offener Kantenzug: = Kantenzug, der in verschiedenen Knoten beginnt und endet

Weg: = offener Kantenzug, der keinen Knoten mehrfach enthält

Länge eines Weges: = Anzahl der Kanten entlang des Weges

Kreis: = Geschlossener Kantenzug, der (außer den Anfangs- und Endknoten) keinen Knoten mehrfach enthält (jede Schlinge ist ein spezieller Kreis)

Abstand $d(x, y)$ zweier Knoten x, y im Graphen G : = kleinste Länge eines Weges von x nach y , falls es solche Wege gibt. Andernfalls ist $d(x, y) = \infty$.

Eigenschaften des Abstandes:

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle x, y aus V .
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, Dreiecksungleichung.

Definition Der Graph $G = (V, E)$ ist **zusammenhängend**: $\Leftrightarrow$ für alle x, y aus V gilt: wenn $x \neq y$, so existiert ein Weg von x nach y . Falls G nicht zusammenhängend ist, so zerfällt der Graph in mehrere zusammenhängende **Komponenten**.

Hilfssatz 3

$G = (V, E)$ ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn Teilmengen A, B von V existieren mit $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$, und es existiert keine Kante e mit $e = (a, b)$ und $a \in A$ und $b \in B$.

Hilfssatz 4

Wenn in G genau zwei Knoten x, y mit $d(x) = \text{ungerade Zahl}$ und $d(y) = \text{ungerade Zahl}$ existieren, so existiert ein Weg von x nach y .

Beweis:

Wegen der Hilfssätze 2 und 3 müssen x und y zur gleichen Komponente gehören. Da aber jede Komponente zusammenhängend ist, existiert ein Weg von x nach y .

Folgerung: Es kann also nicht sein, dass ein Teilgraph nur einen Knoten mit ungerader Valenz hat.

Die Einteilung von Graphen in zusammenhängende und nicht zusammenhängende ist oft zu grob. Man benötigt noch ein Maß für die Stärke des Zusammenhangs. Von besonderem Interesse sind solche Knoten oder Kanten, deren Entfernung eine Zerstörung des Zusammenhangs mit sich bringen.

Definition Ein Knoten x ist **Artikulation** in G : $\Leftrightarrow G \setminus \{x\}$ besitzt mehr Komponenten als G .

Definition Eine Kante e ist **Brücke** von G : $\Leftrightarrow G \setminus \{e\}$ besitzt mehr Komponenten als G .

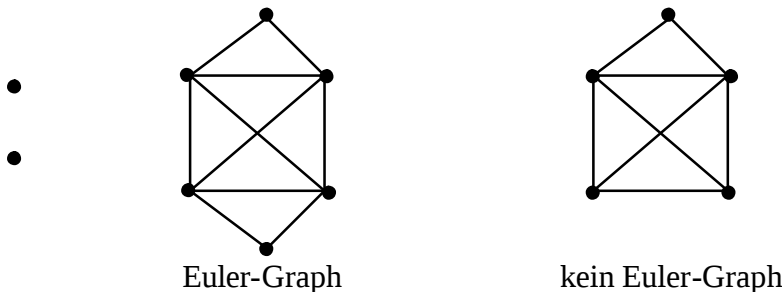
Satz Sei G zusammenhängend, e Kante in G . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) e ist Brücke von G .
- b) Kein Kreis von G enthält e .
- c) Es existieren $x, y \in V$ mit: e liegt auf jedem Weg von x nach y .

Definition Euler-Linie: = geschlossener Kantenzug, der alle Kanten von G genau einmal enthält (isolierte Knoten sind möglich).

Definition Euler-Graph: = Graph, zu dem eine Euler-Linie existiert.

Beispiele:



Hilfssatz 5

Wenn G Euler-Graph ist und keine isolierten Knoten hat, so ist G zusammenhängend.

Beweis: Seien x, y beliebige verschiedene Knoten. x inzidiert mit mindestens einer Kante e und y mit einer Kante f . Da G Euler-Graph ist, existiert ein Kantenzug, der alle Kanten von G enthält. Also existiert ein offener Kantenzug von x nach y . Damit ist G zusammenhängend.

Satz von Euler

Sei $G = (V, E)$ Graph ohne isolierte Knoten. G ist Euler-Graph genau dann, wenn

1. G zusammenhängend ist und
2. für alle $x \in V$ gilt: $d(x)$ ist gerade Zahl.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " 1. folgt unmittelbar aus Hilfssatz 5.

zu 2. Für jeden Knoten x des Euler-Graphen, der nicht Startknoten ist, gilt: man läuft über eine Kante in x ein, und über eine andere Kante verlässt man x wieder, also ist $d(x)$ eine gerade Zahl. Ist x Startknoten, so muss x auch Endknoten sein, also ist $d(x)$ wieder gerade.

" $\Leftarrow$ " Sei G zusammenhängend, und jeder Knoten habe gerade Valenz. Man konstruiert dann wie folgt eine Euler-Linie:

- 1) Konstruktion eines beliebigen Kantenzuges h , der in einem beliebigen Knoten x beginnt und dort auch wieder endet (i. a. noch keine Euler-Linie). Sei $E_1 =$ Menge aller Kanten, die nicht zu h gehören, $V_1 =$ Menge aller Knoten, die mit Kanten aus E_1 inzidieren, $G_1 = (V_1, E_1)$. Alle Knoten von G_1 haben gerade Valenz.
- 2) Sei $x_1 \in V_1$, und x_1 werde von h erfasst. Nun konstruiert man einen Kantenzug h_1 in G_1 , der in x_1 beginnt und endet.
- 3) So wird weiter verfahren, bis G_k der Nullgraph ist.
- 4) Nun werden die Kantenzüge $h, h_1, h_2, \dots, h_k$ wie folgt kombiniert: Man geht von x aus auf h bis zum ersten bezeichneten Knoten x' , weiter auf h' bis zu x' zurück, auf h weiter bis x'' , auf h'' bis x'' zurück usw.

Beispiel Königsberger Brückenproblem:

Der dem Problem entsprechende Graph ist kein Euler-Graph. Deswegen existiert kein Weg über die Brücken mit der gewünschten Eigenschaft.

6.3 Kürzeste Wege

Sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne parallele Kanten. $w(x, y)$ ist **Kantenbewertung (Kantengewicht)**, wenn $w(x, y)$ eine nichtnegative reelle Zahl ist.

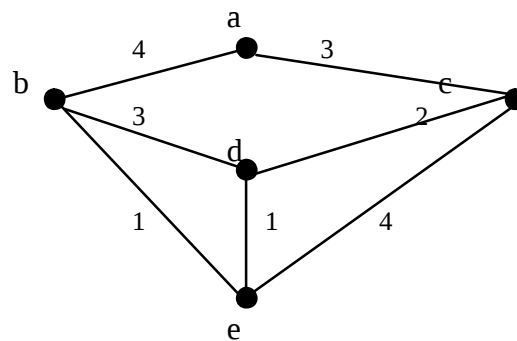
$G = (V, E)$ ist ein **bewerteter (gewichteter) Graph**, wenn in ihm die Kanten bewertet sind.

Länge eines Weges eines gewichteten Graphen: = Summe der Gewichte der Kanten längs des Weges.

Ziel: Suche eines kürzesten Weges in einem Graphen,

Methode: **Dijkstra-Algorithmus** (Edsger Wybe Dijkstra 1959),

Erläuterung an einem Beispiel: Es sei der folgende gewichtete Graph gegeben und ein kürzester Weg von b nach c gesucht.



Algorithmus:

1. $l(b) = 0$, $S = \{b\}$ setzen.
2. Alle Kanten (x, y) betrachten mit $x \in S$ und $y \notin S$ und $l(y) := l(x) + w(x, y)$ bilden.

(x, y)	$l(x) + w(x, y)$	$l(y)$
(b, a)	$0 + 4$	4
(b, d)	$0 + 3$	3
(b, e)	$0 + 1$	$1 = l^* = l(e)$.

Minimum l^* aller Summen bestimmen, $S := S \cup \{y \mid l(y) = l^*\} = \{b, e\}$.

3. weiter wie bei 2.

(x, y)	$l(x) + w(x, y)$	$l(y)$
(b, a)	$0 + 4$	4
(b, d)	$0 + 3$	3
(e, d)	$1 + 1$	$2 = l^* = l(d)$.
(e, c)	$1 + 4$	5.

$S = S \cup \{d\} = \{b, e, d\}$.

4. wie 2.

(x, y)	$l(x) + w(x, y)$	$l(y)$
(b, a)	$0 + 4$	4
(d, c)	$2 + 2$	$4 = l^* = l(c)$
(e, c)	$1 + 4$	5.

$S = S \cup \{c\} = \{b, e, d, c\}$. Zielknoten ist erreicht.

Ein kürzester Weg von b nach c geht also über e und d und hat die Länge 4.

6.4 Bäume

Definition Ein zusammenhängender und kreisfreier Graph ist ein **Baum**.

Definition Ein Graph, bei dem alle Komponenten Bäume sind, ist ein **Wald**.

Satz Sei $G = (V, E)$ ein Baum. $x, y \in V, x \neq y$. Dann existiert genau ein Weg von x nach y .

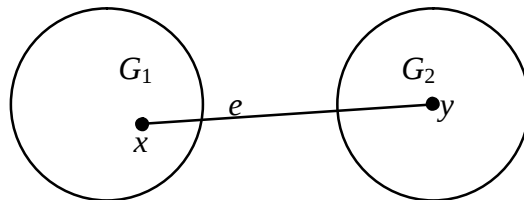
Beweis: Dass mindestens ein Weg existiert ist klar, weil ein Baum zusammenhängend ist. Angenommen es gäbe zwei verschiedene Wege von x nach y , dann enthielte die Vereinigung der beiden Wege aber einen Kreis.

Satz Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit n Knoten. Dann besitzt G genau $n - 1$ Kanten.

Beweis durch Induktion über n :

Induktionsanfang: $n = 1$, d. h. der Baum besteht aus nur einem Knoten. Da Bäume kreisfrei sind, kann es keine Schlinge geben, d. h. es gibt $n - 1 = 0$ Kanten.

Induktionsschritt: Habe G n Knoten, sei etwa $e = (x, y)$. Dann existiert nach obigem Satz genau ein Weg von x nach y . Bei Streichung der Kante e zerfällt G somit in zwei Komponenten G_1 und G_2 .



G_1 und G_2 sind wieder Bäume mit n_1 bzw. n_2 ($n_1, n_2 < n$) Knoten. Nach der Induktionsvoraussetzung hat G_1 $n_1 - 1$, und G_2 hat $n_2 - 1$ Kanten. Mithin hat $G_1 \cup G_2 = (V, E \setminus \{e\})$ $n_1 + n_2 = n$ Knoten und $n_1 + n_2 - 2 = n - 2$ Kanten. Um G wieder zu vervollständigen, muss die Kante e noch hinzugefügt werden. Also besitzt G n Knoten und $(n - 2) + 1 = n - 1$ Kanten.

Eigenschaften von Bäumen Ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten ist ein Baum, falls er folgende äquivalente Eigenschaften hat:

- G ist zusammenhängend und kreisfrei.
- G ist zusammenhängend und besitzt $n - 1$ Kanten.
- G ist kreisfrei und besitzt $n - 1$ Kanten.
- G ist schlingenfrei für alle Knoten x, y mit $x \neq y$, und es existiert genau ein Weg von x nach y .

Wurzelbäume

Bäume, in denen ein Knoten (**Wurzel**) besonders hervorgehoben wird, heißen Wurzelbäume. Die Endknoten heißen **Blätter**.

Beispiele: Darstellung der Nachkommen einer Person, Verzeichnisstruktur von Betriebssystemen.

Bezeichnungen: Ist (x, y) Kante eines Wurzelbaumes, die von ‚oben‘ nach ‚unten‘ verläuft, so heißt x **Vater** von y bzw. y **Sohn** von x .

Definitionen Sei $G = (V, E)$ ein Wurzelbaum und v ein Knoten in ihm.

Niveau des Knotens v : = Abstand von v zur Wurzel (die Wurzel hat das Niveau 0),

Höhe von G : = maximal auftretendes Niveau,

G ist **binärer Wurzelbaum**: $\Leftrightarrow$ Jeder Knoten hat höchstens zwei Söhne

G ist **regulärer binärer Wurzelbaum**: $\Leftrightarrow$ Jeder Knoten (außer den Blättern) hat genau zwei Söhne.

Eigenschaften von regulären binären Wurzelbäumen mit n Knoten

- a) Genau ein Knoten (die Wurzel) hat den Grad 2.
- b) Die anderen Knoten haben den Grad 1 (die Blätter) oder den Grad 3 (die inneren Knoten).
- c) Die Anzahl aller Knoten ist ungerade.
- d) Für die Anzahl k der Blätter gilt: $k = (n + 1) / 2$.
- e) Die maximale Anzahl von Knoten auf dem Niveau r ist 2^r .

Beweis zu c)

Sei $n = \text{Anzahl der Knoten} = |V|$; $k = \text{Anzahl der Blätter}$, $l = \text{Anzahl der inneren Knoten}$

$$\Rightarrow n = 1 + k + l.$$

Wir wissen, dass $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2|E| = 2 \cdot (n - 1) = 1 \cdot 2 + k \cdot 1 + l \cdot 3$. Dann muss $k + 3l$ eine gerade

Zahl sein. Dann müssen entweder k und l beide gerade oder beide ungerade sein. In beiden Fällen aber ist $k + l$ gerade und damit $n = k + l + 1$ ungerade, was zu zeigen war.

6.5 Spannende Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

$G' = (V', E')$ ist **Teilgraph** von G , wenn $V' \subseteq V$, $V' \neq \emptyset$, und $E' \subseteq E$ ist.

Ein Teilgraph G' von G heißt **spannender Teilgraph**, wenn $V' = V$.

Ist ein spannender Teilgraph T von G ein Baum, so heißt T **Gerüst** von G .

Satz Ein Graph G besitzt genau dann ein Gerüst, wenn er zusammenhängend ist.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Besitzt G ein Gerüst, d.h. einen spannenden Teilbaum, dann ist G zusammenhängend.

" $\Leftarrow$ " Sei G zusammenhängend. Ist G ein Baum, dann ist man fertig. Ist G kein Baum, dann enthält G wenigstens einen Kreis. Man streicht nun eine Kante des Kreises und erhält einen zusammenhängenden Teilgraphen G' . Ist G' ein Baum, so ist man fertig. Wenn nicht, dann streicht man eine weitere Kante eines vorhandenen Kreises. So verfährt man weiter bis man einen Baum konstruiert hat.

Alle spannenden Bäume eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ haben dieselbe Anzahl von Kanten, nämlich $|V| - 1$. Daraus folgt, dass man immer $|E| - |V| + 1$ Kanten streichen muss, um einen spannenden Baum zu erhalten.

Definition zyklomatische Zahl $n(G) := |E| - |V| + 1$

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender und gewichteter Graph.

Definition Ein spannender Baum T von G heißt **Minimalgerüst**, wenn das Gewicht von T minimal unter allen Gewichten aller Gerüste von G ist.

Konstruktion eines Minimalgerüsts mit dem **Kruskal-Algorithmus**:

1. Man wähle eine Kante mit kleinster Bewertung.
2. Solange wie möglich füge man zu den bereits gewählten Kanten eine Kante mit kleinstmöglicher Bewertung hinzu, die mit den schon gewählten Kanten keinen Kreis bildet (nach genau $|V| - 1$ Schritten ist man fertig).