# 4 Logik und Schaltalgebra

## 4.1 Aussagenlogik

**„Definition“**
Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu sagen, dass es wahr (W) oder falsch (F) ist.
Beispiele: Heute ist Montag. 3 ist größer als 7.

**Operationen**
Seien $p$, $q$ Aussagen.

| | | **Negation** | **Konjunktion** | **Disjunktion (Alternative)** | **Implikation** | **Äquivalenz** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **nicht** | **und** | **oder** | **daraus folgt** | **genau dann wenn** |
| ***p*** | ***q*** | **Ø *p*** | ***p* Ù *q*** | ***p* Ú *q*** | ***p* ® *q*** | ***p* « *q*** |
| F | F | W | F | F | W | W |
| F | W | | F | W | W | F |
| W | F | F | F | W | F | F |
| W | W | | W | W | W | W |

**Induktive Definition Logischer Ausdruck**
(i) F, W, $p$ sind logische Ausdrücke (F, W sind Konstanten, $p$ ist Variable).
(ii) $H$, $H_1$, $H_2$ logische Ausdrücke $\Rightarrow \neg H$, $(H_1 \vee H_2)$, $(H_1 \wedge H_2)$, $(H_1 \rightarrow H_2)$, $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ sind logische Ausdrücke.
(iii) Andere Zeichenketten sind keine logischen Ausdrücke.

Kurzschreibweisen: für Ø***p*** auch $\overline{p}$**,** für ***p*** Ù ***q*** auch ***pq***
Beispiel: $(p \rightarrow q\ \overline{p}) \vee r$ ist ein logischer Ausdruck.

**Definition Belegung**
Sei $H$ logischer Ausdruck in den Variablen $p_1, p_2,..., p_n$.
$f$ ist **Belegung** von $H$: $\Leftrightarrow f\colon \{p_1, p_2,..., p_n\} \rightarrow \{F, W\}$

**Wert(*H*, *f*)**: = der logische Wert, den $H$ annimmt, wenn die Variablen in ihm gemäß $f$ festgelegt sind.

Beispiel: $H \equiv (p \rightarrow q\ \overline{p}) \vee r$; $f$: $p \rightarrow$ W Wert($H$, $f$) = F.
$q \rightarrow$ F
$r \rightarrow$ F

***H*₁ ist äquivalent zu *H*₂** ($H_1 = H_2$): $\Leftrightarrow$ Wert($H_1$, $f$) = Wert($H_2$, $f$) für alle Belegungen f.

**Satz (Umformungsregeln)** Seien $p$, $q$, $r$ Aussagen.
1. ØØ***p* = *p***
2. ***p* Ù *q* = *q* Ù *p*, *p* Ú *q* = *q* Ú *p*** **Kommutativgesetze**
3. (***p* Ù *q*) Ù *r* = *p* Ù (*q* Ù *r*)**
   (***p* Ú *q*) Ú *r* = *p* Ú (*q* Ú *r*)** **Assoziativgesetze**
4. (***p* Ù *q*) Ú *r* = (*p* Ú *r*) Ù (*q* Ú *r*)**
   (***p* Ú *q*) Ù *r* = (*p* Ù *r*) Ú (*q* Ù *r*)** **Distributivgesetze**

5. $\boldsymbol{p \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}}$, $\quad \boldsymbol{p \wedge \mathrm{W} = p}$, $\quad \boldsymbol{p \wedge p = p}$
   $\boldsymbol{p \vee \mathrm{F} = p}$, $\quad \boldsymbol{p \vee \mathrm{W} = \mathrm{W}}$, $\quad \boldsymbol{p \vee p = p}$ **Kürzungs- bzw. Erweiterungsregeln**
6. $\boldsymbol{p \wedge \overline{p} = \mathrm{F}}$, $\quad \boldsymbol{p \vee \overline{p} = \mathrm{W}}$
7. $\boldsymbol{p \rightarrow q = \overline{p} \vee q}$, $\quad \boldsymbol{p \leftrightarrow q = \overline{p}\,\overline{q} \vee p\,q}$
8. $\boldsymbol{\neg(p \wedge q) = \overline{p} \vee \overline{q}}$
   $\boldsymbol{\neg(p \vee q) = \overline{p} \wedge \overline{q}}$ **Regeln von de Morgan**

Beweis: Tabellenmethode (am Beispiel von 7):

| $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{q}$ | $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ | $\boldsymbol{\overline{p}}$ | $\boldsymbol{\overline{p} \vee q}$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | W | W | W |
| F | W | W | W | W |
| W | F | F | F | F |
| W | W | W | F | W |

Weil die Werte der logischen Ausdrücke für alle möglichen Belegungen übereinstimmen, gilt die Äquivalenz.

**Satz**
Zu jedem logischen Ausdruck $H$ existiert ein äquivalenter Ausdruck $H$‘, in dem keine Pfeile vorkommen ($H$‘ heißt dann **pfeilfrei**).

Beweis: Siehe 7.

Beispiel: $H \equiv (p \rightarrow q\ \overline{p}) \vee r = (\overline{p} \vee q\ \overline{p}) \vee r = H$‘.

Ein logischer Ausdruck $H$ heißt **Kanonische Alternative (Disjunktive) Normalform (KAN)** in den Variablen $p_1, p_2,..., p_n$: $\Leftrightarrow H \equiv \mathrm{F}$ oder $H \equiv H_1 \vee H_2 \vee ... \vee H_k$, wobei alle $H_i$ paarweise verschieden sind und alle die Form $\ddot{p}_1\ddot{p}_2...\ddot{p}_n$ haben, wobei $\ddot{p}_j$ die Variable $p_j$ oder deren Negation ist.

Ein logischer Ausdruck $H$ heißt **Kanonische Konjunktive Normalform (KKN)** in den Variablen $p_1, p_2,..., p_n$: $\Leftrightarrow H \equiv \mathrm{W}$ oder $H \equiv H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_k$, wobei alle $H_i$ paarweise verschieden sind und alle die Form $\ddot{p}_1 \vee \ddot{p}_2 \vee ... \vee \ddot{p}_n$ haben, wobei $\ddot{p}_j$ die Variable $p_j$ oder deren Negation ist.

**Satz** Sei $H$ logischer Ausdruck in den Variablen $p_1, p_2,..., p_n$. Dann existieren zu $H$ genau eine äquivalente KAN $H_1$ und genau eine äquivalente KKN $H_2$ (bis auf die Reihenfolge der Alternativ- bzw. Konjunktivglieder).

Beweisidee für die Existenz: (schrittweises Umformen)
1. $H$ pfeilfrei machen
2. Negation „nach innen treiben“ (de Morgan)
3. Klammern ausmultiplizieren (Distributivität) und Kürzungsregeln anwenden
4. Erzeugung der Alternativ- bzw. Konjunktivglieder durch Erweitern
5. Streichen von mehrfach auftretenden Gliedern
6. Sortieren der Glieder

Sei $H$ logischer Ausdruck in den Variablen $p_1, p_2,\ldots, p_n$.

| | |
|---|---|
| $H$ ist **allgemeingültig** (**Tautologie**): $\Leftrightarrow$ | Wert($H$, $f$) = W für alle Belegungen $f$ der Variablen $p_1, p_2,\ldots, p_n$. |
| $H$ ist **erfüllbar**: $\Leftrightarrow$ | Es existiert eine Belegung $f$ mit Wert($H$, $f$) = W. |
| $H$ ist **unerfüllbar** (**kontradiktorisch**): $\Leftrightarrow$ | Wert($H$, $f$) = F für alle Belegungen $f$ der Variablen $p_1, p_2,\ldots, p_n$. |

Verfahren zur Feststellung, welcher der drei Fälle eintritt:
1. Wert($H$, $f$) für alle möglichen $2^n$ Belegungen $f$ ermitteln (Wertetabellen aufstellen) oder
2. mittels KAN $H$‘ oder
3. mittels KKN $H$‘‘.

**Satz**

a) $H$ ist allgemeingültig genau dann, wenn die KAN $H$‘ alle möglichen $2^n$ Glieder $\ddot{p}_1\ddot{p}_2\ldots\ddot{p}_n$ als Alternativglieder enthält; $H$ ist kontradiktorisch genau dann, wenn $H$ ‘ ≡ F.

b) $H$ ist allgemeingültig genau dann, wenn die KKN $H$‘‘ ≡ W; $H$ ist kontradiktorisch genau dann, wenn $H$‘‘ alle möglichen $2^n$ Glieder $\ddot{p}_1 \vee \ddot{p}_2 \vee \ldots \vee \ddot{p}_n$ als Konjunktivglieder enthält.

Beispiele für Tautologien:
1. $H_1 \equiv p \vee \overline{p}$
2. $H_2 \equiv p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $H_3 \equiv p \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p})$ ist auch allgemeingültig, weil
   $p \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) = p \vee \overline{p}\,(q \vee \overline{q})$ ($\overline{p}$ ausklammern)
   $= p \vee \overline{p}\mathrm{W} = p \vee \overline{p} = \mathrm{W} = H_3$‘‘ KKN.

**Erfüllbarkeitsproblem (Satisfiability)**

Sei $H$ logischer Ausdruck. Frage: Existiert eine Belegung $f$ mit Wert($H$, $f$) = W?

Dieses Problem ist in der Komplexitätstheorie von großer Bedeutung. Es gehört zu den NP-schweren Problemen, d. h. ein Algorithmus, der obiges Problem löst, erfordert wahrscheinlich immer eine Zeit, die exponentiell mit der Anzahl der Variablen wächst.

**Definition Wahrheitsfunktion**

$g$ ist $n$-stellige **Wahrheitsfunktion** (**Boolesche Funktion**): $\Leftrightarrow$ $g$: $\{\mathrm{F}, \mathrm{W}\}^n \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{W}\}$.

Beispiel:

| ***p*** | ***q*** | ***g*(*p*, *q*)** |
|---|---|---|
| F | F | W |
| F | W | F |
| W | F | W |
| W | W | F |

**Satz**

- Jeder logische Ausdruck $H(p_1, p_2,\ldots, p_n)$ definiert durch Wert($H$, $f$) eine $n$-stellige Boolesche Funktion $g$.
- Umgekehrt existiert zu jeder $n$-stelligen Booleschen Funktion $g$ ein Ausdruck $H(p_1, p_2,\ldots, p_n)$, der durch den Wert($H$, $f$) diese Funktion darstellt.

Beispiel: $g$ wie oben

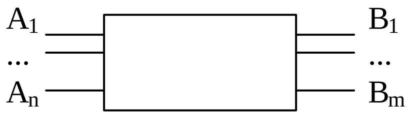
KAN $= (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{q}) = H(p, q) = (\overline{q}(\overline{p} \vee p))$

$= \overline{q} \wedge \mathrm{W} = \overline{q}$

## 4.2 Schaltalgebra

Unter Schaltalgebra versteht man die Anwendung der Aussagenlogik für den Entwurf elektrischer Schaltungen.

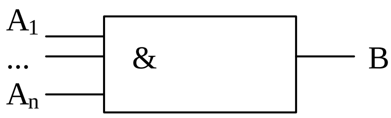
**Definition Binäre kombinatorische Schaltung**
Eine elektrische Schaltung der Gestalt




mit *n* Eingängen und *m* Ausgängen heißt **binäre kombinatorische Schaltung**, wenn a) $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, $B_1$, $B_2$, ..., $B_m$ höchstens zwei Werte (0, 1) annehmen können und b) der Wert am Ausgang $B_j$ zum Zeitpunkt *t* allein von den Werten der Eingaben $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ zu demselben Zeitpunkt abhängt.

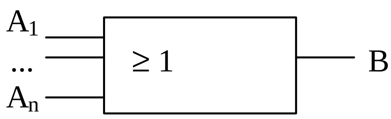
Die Grundbausteine einer Schaltung heißen Gatter und werden in Deutschland üblicherweise wie folgt dargestellt:

**UND-Gatter**



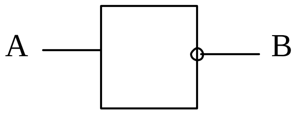

B = 1, falls alle $A_i$ gleich 1
B = 0, sonst.

**ODER-Gatter**




B = 1, falls mindestens ein $A_i$ gleich 1
B = 0, sonst.

**NICHT-Gatter**

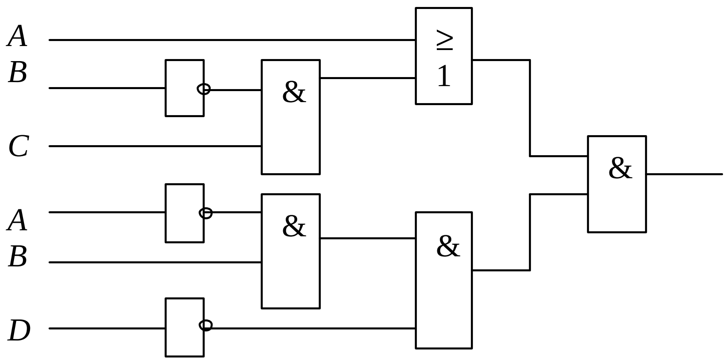



B = 1, falls A = 0
B = 0, falls A = 1

**Induktive Definition Verzweigungsfreie Schaltung**

(i) Jede **Signalleitung** 0—— , 1—— , $A_i$—— ist eine verzweigungsfreie Schaltung.
(ii) Seien $S_1$, $S_2$, ..., $S_m$ verzweigungsfreie Schaltungen und $G$ ein Gatter mit $m$ Eingängen. Wird der Ausgang von $S_j$ mit dem $j$. Eingang von $G$ ($j = 1, 2, ..., m$) verbunden, so entsteht wieder eine verzweigungsfreie Schaltung $S$.
(iii) Andere Schaltungen sind keine verzweigungsfreien Schaltungen.

Beispiel:

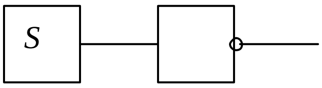


**Definition** **Schalterstellung** $S(A_1, A_2, ..., A_n)$: = Abbildung von $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ in $\{0, 1\}$.

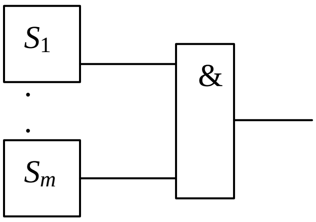
$f$ ist **Schaltfunktion**: $\Leftrightarrow$ $f$ ist Abb. von der Menge aller Schalterstellungen von $S$ in $\{0, 1\}$.

Zuordnung zwischen Schaltungen und (pfeilfreien) Ausdrücken

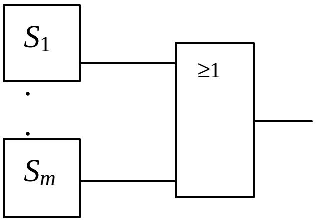
0 — wird F,
1 — wird W,
$A_i$ — wird $a_i$,




wird $\overline{H}$,




wird $H_1H_2 .... H_m$ und




wird $H_1 \vee H_2 ... \vee H_m$ zugeordnet.

Beispiel (siehe oben):

$H \equiv (a \vee \overline{b}c) \wedge (\overline{a}b\overline{d})$.

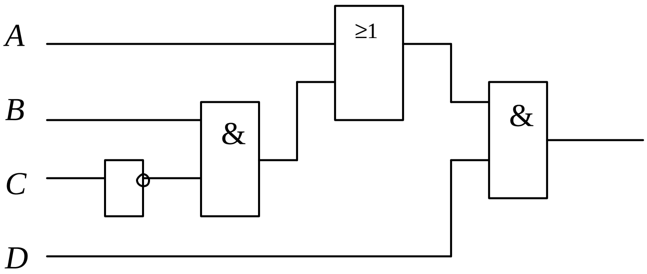
**Fundamentalsatz der Schaltalgebra**

Eine Schaltung $S$ nimmt für eine bestimmte Schalterstellung am Ausgang den Wert 1 an, genau dann, wenn Wert($H$, $f$) = W, wobei $H$ der $S$ zugeordnete logische Ausdruck ist und $f$ die der Schalterstellung zugeordnete Belegung.

**Analyse einer Schaltung**

Gegeben: Schaltung $S$,
Gesucht: Eigenschaften von $S$.
Lösungsidee: $S$ -> Ausdruck $H$ -> KAN $H'$ -> Belegungen $f$ mit Wert($H$, $f$) = W betrachten -> Schalterstellung mit Ausgang 1

Beispiel:




gegebene Schaltung $S$,

$$H \equiv (a \vee b\bar{c})d = ad \vee b\bar{c}d = \bar{a}b\bar{c}d \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee a\bar{b}cd \vee ab\bar{c}d \vee abcd = H'(KAN),$$

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Für diese Schalterstellungen hat S den Ausgangszustand 1 und sonst 0.

**Synthese einer Schaltung**

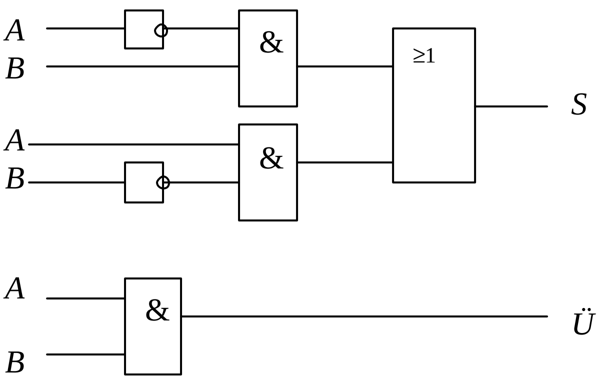
Gegeben: Eigenschaften einer aufzubauenden Schaltung
Gesucht: Schaltung $S$
Lösungsidee: Eigenschaften mit Hilfe einer Booleschen Funktion $g$ ausdrücken -> zugehörige KAN $H$ bilden -> sich daraus ergebende Schaltung $S$ konstruieren.

Beispiel: Gesucht ist eine Schaltung, die die **Addition zweier Dualziffern** realisiert.
Dualziffern werden wie folgt addiert ($S$ stehe für Summe und $Ü$ für Übertrag)

| $A$ | $B$ | $S$ | $Ü$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

Daraus ergeben sich die folgenden logischen Ausdrücke:
$S = \bar{a}b \vee a\bar{b}$ und
$Ü = ab$.

Daraus erhält man die folgende Schaltung.




Diese Schaltung wird **Halbaddierer** genannt und symbolisch auch wie folgt dargestellt: