7 Matrizen und Determinanten

7.1 Matrizenrechnung

Eine **($m \times n$)-Matrix** ist ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots m \\ j=1,2,\dots n}}$$

(m, n) ist der **Typ** der Matrix A, die a_{ij} sind die **Komponenten** von A.
Im Folgenden betrachten wir reelle Matrizen, d. h. Matrizen, deren Elemente reelle Zahlen sind.

Rechenoperationen

- **Transponieren: A^T**
  Vertauschen von Zeilen und Spalten → Im Allgemeinen ändert sich der Typ der Matrix.
- **Addieren: $A + B$**
  Komponentenweise Addition von Matrizen desselben Typs.
- **Mit einem reellen Skalar multiplizieren: $\alpha \cdot A$**
  Komponentenweise Multiplikation mit einer reellen Zahl α
- **Multiplizieren: $A \cdot B$**
  Die Multiplikation ist nur für verkettete Matrizen erklärt. Zwei Matrizen A und B heißen verkettet, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt. Dann können A und B wie folgt multipliziert werden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{\substack{i=1,2,\dots m \\ k=1,2,\dots p}} \cdot (b_{kj})_{\substack{k=1,2,\dots p \\ j=1,2,\dots n}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \cdot b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \cdot b_{kn} \\ . & . & . \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk} \cdot b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk} \cdot b_{kn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{\substack{i=1,2,\dots m \\ j=1,2,\dots n}} = (c_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots m \\ j=1,2,\dots n}}$$

Spezielle Matrizen

- **Quadratische Matrizen** der **Ordnung** n (Zeilenanzahl = Spaltenanzahl = n)
- **Einheitsmatrix** $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$
- **Nullmatrix O_n** (der Ordnung n) besteht aus Nullen
- **Entgegengesetzte Matrix** $-A = (-1) \cdot A$

Rechengesetze

Sei $\mathbf{M}(m, n)$ die Menge aller Matrizen vom Typ (m, n). Dann gelten für beliebige Matrizen A, $B, C \in \mathbf{M}(m, n)$ und beliebige reelle Zahlen α und β folgende Rechengesetze:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(ii) $A + B = B + A$
(iii) $A + \boldsymbol{O} = A$ ($\boldsymbol{O}$ ist die Nullmatrix)
(iv) $A + (-A) = \boldsymbol{O}$ ($-A$ ist die zu A entgegengesetzte Matrix)
(v) $1 \cdot A = A$
(vi) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
(vii) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
(viii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

$\Rightarrow$ Die Menge $\mathbf{M}(m, n)$ bildet bezüglich der Addition und der Multiplikation mit einem reellen Skalar einen **Vektorraum**.

Sei nun $\mathbf{M}(n, n)$ die Menge aller quadratischen Matrizen der Ordnung n. Dann gelten für beliebige Matrizen $A, B, C \in \mathbf{M}(m, n)$ folgende Rechengesetze:

(ix) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
(x) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
(xi) $A \cdot E = E \cdot A = A$

Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt im Allgemeinen nicht (man finde ein Gegenbeispiel).
(i) bis (iv), (ix), (x) [, (xi)] $\Rightarrow$ ($\mathbf{M}(n, n)$; O_n; +, ·) ist ein Ring [mit Einselement].

An dieser Stelle ergibt sich die Frage nach der Existenz inverser Matrizen, d. h. existiert zu einer Matrix A eine Matrix A', so dass $A \cdot A' = \boldsymbol{E}$? Die Beantwortung dieser Frage erfolgt im Kapitel 7.3.

7.2 Determinanten

Sei $A \in \mathbf{M}(n, n)$, d. h. $A = (a_{ij})_{i,\, j\, =\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n}$.
Für $n \geq 2$ bezeichne A_{ij} jene $((n\text{-}1)\times(n\text{-}1))$-Teilmatrix, die durch Streichen der i. Zeile und der j. Spalte aus A entsteht.

Induktive Definition der **Determinante** von A

(i) $A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = |A| = a_{11}$

(ii) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,\, j=1,2,\ldots n}$$

$\Rightarrow \det A = |A| = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}\, a_{1n}\det A_{1n}$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \left|A_{1j}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

= (nach der ersten Zeile entwickelte) **n-reihige Determinante**.

Beispiele:

$n = 2$: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$\Rightarrow$ **Sarrussche Regel** (nur für 3-reihige Determinanten):

- an die gegebene Matrix noch einmal die ersten zwei Spalten anfügen
- die von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen liefern dann die Produkte, die addiert werden (wobei sie das durch die Produktbildung entstehende individuelle Vorzeichen behalten)
- die von rechts oben nach links unten verlaufenden Diagonalen liefern die Produkte, die subtrahiert werden (wobei sie wieder das durch die Produktbildung entstehende individuelle Vorzeichen behalten)

Entwicklungssatz für Determinanten

In der Definition haben wir die Determinante nach der ersten Zeile entwickelt. Zur Berechnung der Determinante kann man nach jeder Zeile bzw. Spalte entwickeln. Es gilt dann:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{kj} \cdot |A_{kj}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l}\, a_{il} \cdot |A_{il}|; \quad k, l = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

Beispiel:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot |A_{31}| - 0 \cdot |A_{32}| + 0 \cdot |A_{33}| - 2 \cdot |A_{34}| = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (4 + 6 - 3 - 9 - 1 + 8) = -10$$

Eigenschaften von Determinanten

a) Die Determinante einer reellen Matrix ist eine reelle Zahl.

b) Vertauscht man in Determinanten zwei Zeilen (bzw. Spalten), so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
Beweis durch vollständige Induktion über n (= Ordnung der Matrix):
Induktionsanfang für n = 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -|A|$$

Induktionsschritt:
Sei $A \in \mathbf{M}(n, n)$, $n > 2$. A' sei aus A durch Vertauschen zweier Zeilen entstanden. Wir entwickeln $|A'|$ nach einer Zeile, die nicht vertauscht wurde. Das sei z. B. die k. Zeile:

$$\left|A'\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \left|A_{kj}'\right|$$

Die Ordnung aller Determinanten $|A_{kj}'|$ ist n – 1, und in allen Matrizen sind jeweils zwei Zeilen gegenüber der $|A_{kj}|$ vertauscht. Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit $|A_{kj}'| = -|A_{kj}| \Rightarrow$ Behauptung.

c) Folgerung aus b): Hat eine Determinante zwei gleiche Zeilen bzw. Spalten, so ist die Determinante gleich Null.

d) Sind alle Elemente einer Zeile bzw. Spalte gleich Null, so ist die Determinante gleich Null.

e) Multipliziert man alle Elemente der i. Zeile (j. Spalte) mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$, so gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha \cdot a_{i1} & \alpha \cdot a_{i2} & . & . & \alpha \cdot a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Beweis mit Entwicklung nach der i. Zeile (j. Spalte).

f) Folgerung aus e): $|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A|$

g) Addiert man zu einer Zeile (Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich die Determinante nicht.
Beweis mit Entwicklung nach der betreffenden Zeile (Spalte) und Eigenschaft c).

h)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Beweis durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

i) Aus den Regeln b), g) und h) ergibt sich ein weiteres Berechnungsverfahren für Determinanten:
Matrix A durch elementare Umformungen (Zeilen-/Spaltentausch, Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl, Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen) auf Dreiecksgestalt (unter der Hauptdiagonalen lauter Nullen) bringen und h) anwenden. Man beachte, dass sich bei Vertauschungen das Vorzeichen ändert.
Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

j) **Multiplikationssatz**[1]
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

[1] Beweis siehe z. B. Neiss, F.: Determinanten und Matrizen. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1959)

7.3 Die inverse Matrix

Sei $A \in \mathbf{M}(n, n)$. A heißt **regulär**, wenn $|A| \neq 0$ und A heißt **singulär**, wenn $|A| = 0$.
A^{-1} ist **inverse Matrix** zu A genau dann, wenn $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (Einheitsmatrix der Ordnung n). Falls A^{-1} also existiert, kann man den Multiplikationssatz anwenden und erhält:
$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow A^{-1}$ existiert höchstens dann, wenn A reguläre Matrix ist.

Satz

Jede reguläre $(n \times n)$-Matrix besitzt die inverse Matrix $(b_{ij}) = \left(\frac{(-1)^{i+j} \left| A^T{}_{ij} \right|}{|A|} \right)$,

$i, j = 1,2, \ldots,$ n; wobei $A^T{}_{ij}$ die Teilmatrix ist, die man aus der transponierten Matrix A^T durch Streichung der i. Zeile und der j. Spalte erhält.
Bevor der Beweis geführt wird, sei die Berechnung an einem Beispiel klar gemacht:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $|A| = 3$.

$$\left|A^T{}_{11}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \left|A^T{}_{12}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \left|A^T{}_{13}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$\left|A^T{}_{21}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \left|A^T{}_{22}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \left|A^T{}_{23}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$\left|A^T{}_{31}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \left|A^T{}_{32}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \left|A^T{}_{33}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Unter Beachtung des wechselnden Vorzeichens ergibt sich nun folgende inverse Matrix:
$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zur Kontrolle und Übung führe man die Multiplikation $A \cdot A^{-1}$ einmal aus.

Beweis des Satzes:
Sei A eine beliebige, reguläre Matrix und A^{-1} wie oben definiert. Wir berechnen nun
$$A \cdot A^{-1} = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \frac{(-1)^{k+j} \left|A^T{}_{kj}\right|}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \cdot \left|A^T{}_{kj}\right|.$$

Weil $A^T{}_{kj} = A_{jk}$ (Streichung der *j*. Zeile und *k*. Spalte in *A*), gilt nun:
für $i = j$

$$c_{ii} = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \cdot |A_{ik}| = \frac{1}{|A|} \cdot |A| = 1$$

und für $i \neq j$ gilt

$c_{ij} = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \cdot |A_{jk}| = 0$, weil die Summe als Entwicklung der Determinante nach der *j*. Spalte von einer Matrix aufgefasst werden kann, bei der die *i*. und die *j*. Zeile gleich sind.