1 Grundbegriffe der Mengenlehre

„Definition”

Georg Cantor, 1895 (Lexikon der Mathematik):
„Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Beispiele:
M_1 = Menge der Namen der Studenten der Gruppe
M_2 = Menge aller Primzahlen
M_3 = Menge aller natürlichen Zahlen x, die der Ungleichung $5 \leq x < 7$ genügen
M_4 = Menge aller reellen Zahlen y, die der Ungleichung $5 \leq y < 7$ genügen

Beschreibung von Mengen

- **durch Aufzählen aller Elemente**
  $M_1 = \{...\}$
  $M_3 = \{5, 6\}$

- **durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft H**
  $M_2 = \{p: p \text{ ist Primzahl}\} = \{p: p \text{ ist nat. Zahl} > 1, \text{ die nur durch sich und 1 teilbar ist}\}$
  $M_3 = \{x: x \text{ ist natürliche Zahl}, 5 \leq x < 7\}$
  $M_4 = \{y: y \text{ ist reelle Zahl}, 5 \leq y < 7\} = [5, 7[$
  allgemein:
  $M = \{x: \mathrm{H}(x)\}$

Bemerkungen:
- spezielle Menge: Leeremenge $\emptyset$
- Reihenfolge bei der Aufzählung spielt keine Rolle
- jedes Element tritt nur einmal in der Menge auf
- Schreibweisen: $a \in M$, $b \notin M$
- $a \neq \{a\}$
- Elemente von Mengen können wieder Mengen sein, z. B. $M = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

Mengengleichheit

Definition Seien M_1, M_2 Mengen. $\boldsymbol{M_1 = M_2}$: $\Leftrightarrow$ M_1 und M_2 enthalten dieselben Elemente.

Eigenschaften der Gleichheit:

(1) $M = M$,	Reflexivität
(2) $M_1 = M_2 \Rightarrow M_2 = M_1$,	Symmetrie
(3) $M_1 = M_2$ und $M_2 = M_3 \Rightarrow M_1 = M_3$.	Transitivität

Mengenoperationen

Definitionen Seien M_1, M_2, M beliebige Mengen.
Durchschnitt $\boldsymbol{M_1 \cap M_2}: = \{x: x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$,
Vereinigung $\boldsymbol{M_1 \cup M_2}: = \{x: x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$,
Differenz $\boldsymbol{M_1 \setminus M_2}: = \{x: x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$.

(Veranschaulichung mittels Eulerscher Kreise)

Definition M_1 und M_2 sind **disjunkt**: $\Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Beispiele:
{A, U, T, O} ∩{B, U, S} = {U};
{A, U, T, O}∪ {B, U, S} = { A, U, T, O, B, S};
{A, U, T, O}\ {B, U, S} = { A, T, O};
{B, U, S} \{A, U, T, O} = {B, S}.

Satz (Rechengesetze) Es gelten folgende Rechengesetze:
(1) $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$; $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$; Kommutativität
(2) $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$;
$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$; Assoziativität
(3) $(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3)$;
$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)$; Distributivität
(4) $M \cup M = M$; $M \cap M = M$; Idempotenz
(5) $M \cap \emptyset = \emptyset$; $M \cup \emptyset = M$;
(6) $M \setminus \emptyset = M$; $M \setminus M = \emptyset$;
(7) $M_1 \cap M_2 = M_1 \setminus (M_1 \setminus M_2)$; Zusammenhang von
(8) $M_1 \setminus M_2 = M_1 \setminus (M_1 \cap M_2)$; Durchschnitt und Differenz
(9) $M_1 \setminus (M_2 \cap M_3) = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_1 \setminus M_3)$; Regeln von de Morgan
$M_1 \setminus (M_2 \cup M_3) = (M_1 \setminus M_2) \cap (M_1 \setminus M_3)$;

Beweise mittels der Tabellenmethode (exemplarisch für (9)):
Hierbei bedeutet der Eintrag 0, dass ein Element sich nicht und 1, dass es sich in der angegebenen Menge befindet.

M_1	M_2	M_3	$M_2 \cap M_3$	$M_1 \setminus (M_2 \cap M_3)$	$M_1 \setminus M_2$	$M_1 \setminus M_3$	$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_1 \setminus M_3)$
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	0	**0**
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**

Die Übereinstimmung der 5. und 8. Spalte bedeutet, dass ein Element genau dann in der Menge $M_1 \setminus (M_2 \cap M_3)$ enthalten ist, wenn es sich auch in der Menge $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_1 \setminus M_3)$ befindet. Damit sind die beiden Mengen gleich. □

Inklusion

Definition $\boldsymbol{M_1 \subseteq M_2} :\Leftrightarrow$ für alle x gilt: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$.
sprich: M_1 ist **Teilmenge** von M_2, M_2 ist **Obermenge** von M_1.

Folgerung:

- $M_1 = M_2 \Rightarrow M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$;
- für alle Mengen M gilt: $\emptyset \subseteq M$;
- $\boldsymbol{M_1 \subset M_2} :\Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$ und $M_1 \neq M_2$. **echte Teilmenge**

Satz (Grundeigenschaften der Inklusion) Seien M_1, M_2, M_3, M beliebige Mengen.

(1) Für alle Mengen M gilt: $M \subseteq M$; Reflexivität
(2) $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$; Transitivität
(3) $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$; Antisymmetrie
(4) $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$; $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$;
(5) $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$; $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$;
(6) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1 \cup M_3 \subseteq M_2 \cup M_3$; Monotonie

Beweis:
zu (4) Sei $x \in M_1 \cap M_2$. Dann gilt nach Definition des Durchschnitts, dass $x \in M_1$ und $x \in M_2$.
zu (6) Sei $x \in M_1 \cup M_2$. Dann gilt nach Definition der Vereinigung, dass $x \in M_1$ oder $x \in M_2$.
1. Fall: $x \in M_1$. Dann ist nach Voraussetzung auch $x \in M_2$. Mithin ist $x \in M_2 \cup M_3$.
2. Fall: $x \in M_3$. Damit gilt auch $x \in M_2 \cup M_3$. □

Definition Sei $S \subset M$. $\boldsymbol{\overline{S}}$ ist **Komplementmenge** von S in M genau dann, wenn $\boldsymbol{\overline{S}} = M \setminus S$.

Satz (Eigenschaften der Komplementmenge)

(1) $S \cap \overline{S} = \emptyset$; $S \cup \overline{S} = M$; $\overline{\overline{S}} = S$.
(2) $S = \emptyset \Leftrightarrow \overline{S} = M$.
(3) Seien S, T, M Mengen. Dann gelten die de Morganschen Regeln:
$\overline{S \cup T} = \overline{S} \cap \overline{T}$;
$\overline{S \cap T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.

Definition **Potenzmenge** $\boldsymbol{P(M)}$: = Menge aller Teilmengen von M.
Beispiel: Wenn $M = \{a, b, c\}$. Dann ist $\mathrm{P}(M) = \{\emptyset, M, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

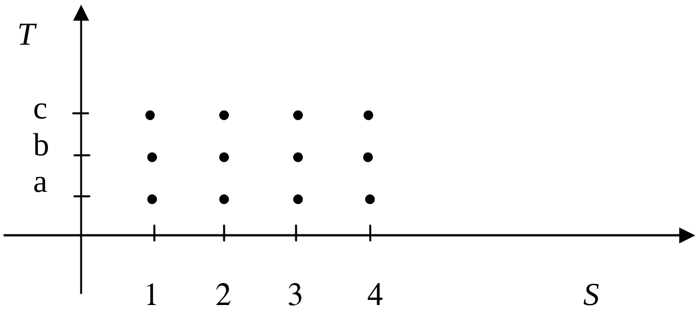
Kartesisches Produkt

Seien S, T Mengen und $s \in S$, $t \in T$. Dann wird mit (s, t) das **geordnete Paar** von s und t bezeichnet.
Bemerkung:

- im Allgemeinen gilt $(s, t) \neq (t, s)$;
- $(s_1, t_1) = (s_2, t_2) \Leftrightarrow s_1 = s_2$ und $t_1 = t_2$.

Definition **Kreuzprodukt (Kartesisches Produkt)** $\boldsymbol{S \times T} := \{(s, t): s \in S \text{ und } t \in T\}$.

Veranschaulichung an einem Beispiel:
Seien $S = \{1, 2, 3, 4\}$ und $T = \{a, b, c\}$.



$S \times T = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$.

Seien $x_i \in X_i$; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dann heißt $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ***n*-Tupel**. (für $n = 2, 3, 4, 5$: Paar, Tripel, Quadrupel, Quintupel).

Definition ***n*-faches kartesisches Produkt**
$\boldsymbol{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n} := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n): x_i \in X_i;\ i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$.
speziell: $X_1 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = M$, dann $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n = \boldsymbol{M^n}$;

Definition **Kardinalzahl $|\boldsymbol{M}|$**: = Anzahl der Elemente von M.
Es gelten dann folgende Beziehungen (ohne Beweis):

- $|M \times N| = |M| \cdot |N|$,
- $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$.
- $|\mathrm{P}(M)| = 2^{|M|}$.