3.1.10 Positionssysteme (Stellenwertsysteme)

Satz

Zu gegebener Basis $b \geq 2$ ($b \in$ IN) kann man jede natürliche Zahl n eindeutig darstellen als:

$$\boldsymbol{n = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0,}$$

wobei a_i aus $\{0, 1, ..., b\text{-}1\}$, $a_k \neq 0$ und $k \geq 0$.
Schreibweise: $\boldsymbol{n =_b a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$

Beispiele:

- $b = 10$, n = fünfhundertundsiebzehn
  $n = 5 * 10^2 + 1 * 10^1 + 7 * 10^0$
  $n =_{10} 517$ **Dezimaldarstellung**

- $b = 2$, $n =_{10} 517$
  $n = 1 * 2^9 + 1 * 2^2 + 1 * 2^0$
  $n =_2 1000000101$ **Dualdarstellung**

- $b = 16$, $n =_{10} 517$
  Ziffernmenge = {0, 1, 2, ... 9, A, B, C, D, E, F}
  $n = 2 * 16^2 + 5 * 16^0$
  $n =_{16} 205$ **Hexadezimaldarstellung**

Divisionsalgorithmus zur Ermittlung der *b*-adischen Darstellung einer natürlichen Zahl

Seien $n, b \in$ IN, ($b \geq 2$) gegeben. Wir führen Divisionen mit Rest wie folgt durch:

$$\begin{array}{ll}
n = q_1 * b + a_0 & 0 \leq a_0 < b \\
q_1 = q_2 * b + a_1 & 0 \leq a_1 < b \\
q_2 = q_3 * b + a_2 & 0 \leq a_2 < b \\
. & \\
. & \\
q_{k-1} = q_k * b + a_{k-1} & 0 \leq a_{k-1} < b \\
q_k = 0 * b + a_k & 0 \leq a_k < b
\end{array}$$

Behauptung: $n =_b a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

Beispiel: $n = 543$, $b = 6$,

$$\begin{array}{rl}
543 = 90 * 6 + 3 & \\
90 = 15 * 6 + 0 & \\
15 = 2 * 6 + 3 & \\
2 = 0 * 6 + 2, & \text{also } 543 =_6 2303.
\end{array}$$

Begründung für die Anwendung dieses Algorithmus:

$$\begin{aligned}
543 &= 90 * 6 + 3 \\
&= (15 * 6 + 0) * 6 + 3 \\
&= ((2 * 6 + 3) * 6 + 0) * 6 + 3 \\
&= 2 * 6^3 + 3 * 6^2 + 0 * 6^1 + 3 * 6^0.
\end{aligned}$$

Übung: 3179 darstellen für $b = 2, 3, 12, 16$;
Lösung: $n =_2 110001101011 =_3 11100202 =_{12} 1A0B =_{16} C6B$

Rechnen mit *b*-adischen Zahlen

$b = 2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

*	0	1
0	0	0
1	0	1

$b = 3$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Beispiel:

$$\begin{array}{lr} & 543_6 \\ + & 242_6 \\ \hline \text{Ü} & 1100_6 \\ \hline \text{S} & 1225_6 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \multicolumn{2}{l}{543_6 \quad * \quad 242_6} \\ \hline & 1530 \\ & 3500 \\ & 1530 \\ \text{Ü} & 10000 \\ \hline \text{S} & 233530_6 \\ \hline\hline \end{array}$$

Teilbarkeitsregeln

Satz
Eine natürliche Zahl n ist durch 3 bzw. durch 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 bzw. durch 9 teilbar ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 1 \bmod 3 \text{ bzw. } 9 \\ 10^i &\equiv 1 \bmod 3 \text{ bzw. } 9 \\ a_i 10^i &\equiv a_i \bmod 3 \text{ bzw. } 9 \\ \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i &\equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \bmod 3 \text{ bzw. } 9 \\ \Rightarrow \quad n &\equiv \text{Quersumme von } n \bmod 3 \text{ bzw. } 9 \end{aligned}$$

Satz
Eine natürliche Zahl n ist durch 4 teilbar, wenn die letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl ergeben.

Beweis:

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 2 \bmod 4 \\ 10^2 &\equiv 0 \bmod 4 \\ 10^i &\equiv 0 \bmod 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \equiv a_1 * 10 + a_0 \bmod 4.$$