3.2 Die Menge Z der ganzen Zahlen

Motiv Die Gleichung $\boldsymbol{a + x = b}$ ist in **IN** nur dann lösbar, wenn $a \leq b$.

x ist **ganze Zahl**: $\Leftrightarrow$ es existieren natürliche Zahlen a, b mit $a + x = b$. Wenn $a \leq b$, dann ist $x = b - a$, wenn $a > b$, dann bezeichnen wir x mit $\boldsymbol{-(a - b)}$.
Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Rechengesetze für Addition und Multiplikation:
- wie in **IN**
- neu: Zu jeder ganzen Zahl a existiert eine ganze Zahl $-a$, so dass $a + (-a) = 0$. $-a$ ist die zu a **entgegengesetzte Zahl**. Es gilt $a - b = a + (-b)$.

Absolutbetrag

$$|\boldsymbol{a}| := \begin{cases} a & \text{wenn } a > 0 \\ 0 & \text{wenn } a = 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

3.3 Die Menge Q der rationalen Zahlen

Motiv Die Gleichung $\boldsymbol{a * x = b}$ ist in **Z** nur dann lösbar, wenn $a \mid b$.

x ist **rationale Zahl**: $\Leftrightarrow$ es existieren ganze Zahlen a, b mit $a * x = b$. Wir bezeichnen dann x mit dem **Bruch** $\frac{b}{a}$ (bzw. b / a).

Addition und Multiplikation

$$\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{s}} \qquad \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{s}} \qquad (q, s \neq 0)$$

Ordnung

$$\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \leq \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}} :\Leftrightarrow \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r} \qquad (q, s > 0)$$

Rechengesetze
- wie in **Z**
- neu: Zu jeder rationalen Zahl a mit $a \neq 0$ existiert eine rationale Zahl a', so dass $a * a' = 1$.
  Bezeichnung: $a' =: \frac{1}{\boldsymbol{a}}$ = **Reziprokes** von a.
- Die $\leq$-Relation ist eine Totalordnung.

3.4 Die Menge IR der reellen Zahlen

Motiv Die Gleichung $\boldsymbol{x^2 = 2}$ ist in **Q** nicht lösbar.

Beweis: indirekt:
angenommen, es existiert eine rationale Zahl x, die die Gleichung löst. Dann ließe sich x als Bruch $\frac{p}{q}$ (mit p und q teilerfremd) darstellen.

Sei $x = \frac{p}{q}$.

$\Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$

$\Rightarrow\ p^2 = 2 * q^2$

$\Rightarrow\ 2 \mid p^2$

$\Rightarrow\ 2 \mid p$ (*)

$\Rightarrow\ p = 2 * k$

$\Rightarrow\ p^2 = (2 * k)^2 = 2 * 2 * k^2 = 2 * q^2$

$\Rightarrow\ 2 * k^2 = q^2$

$\Rightarrow\ 2 \mid q^2$

$\Rightarrow\ 2 \mid q$ (**)

(*) und (**) liefern aber einen Widerspruch zur Eigenschaft teilerfremd zu sein.

Bemerkung:

- Der Beweis wird Aristoteles (384-322 v. u. Z.) zugeschrieben.
- Man sagt, die Zahl $x > 0$ mit $x^2 = 2$ ist eine **algebraische Lücke von Q in IR**.
- Darstellung der Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Die Schließung der Lücken führt zur Menge **IR** der reellen Zahlen. Jedem Punkt auf dem Zahlenstrahl entspricht eine reelle Zahl.

Ordnungsbeziehungen

Seien a, b, c reelle Zahlen. Es existiert eine ≤–Relation, diese ist Totalordnung.

Monotoniegesetze:

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$a < b$ und $c > 0 \Rightarrow a * c < b * c$

$a < b$ und $c < 0 \Rightarrow a * c > b * c$

Absolutbetrag

$$|a| := \begin{cases} a & \text{wenn } a > 0 \\ 0 & \text{wenn } a = 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

Rechengesetze:

1. $|a| = |-a|$; $0 \le |a|$; $a \le |a|$; $|a| \le x \Rightarrow -x \le a \le x$; $a \le x$ und $-a \le x \Rightarrow |a| \le x$
2. $|a * b| = |a| * |b|$
3. $|a + b| \le |a| + |b|$ **Dreiecksungleichung**

Beweise:

zu 1. folgt aus Definition;

zu 2. 1. Fall: $a \geq 0$ und $b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0 \Rightarrow |a| * |b| = a * b = |a * b|$,
2. Fall: $a \geq 0$ und $b < 0 \Rightarrow a * b \leq 0 \Rightarrow |a| * |b| = a * (-b) = -(a * b) = |a * b|$,
usw.

zu 3. Es gilt $a \leq |a|$ und $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$, (*)
andererseits gilt $-a \leq |-a| = |a|$ und $-b \leq |-b| = |b| \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b|$, (**)
aus (*) und (**) und 1. folgt die Dreiecksungleichung.

Satz

4. Sind a und b rationale oder reelle Zahlen mit $a < b$, so existiert eine rationale bzw. reelle Zahl c mit $a < c < b$. Man sagt, **die rationalen und die reellen Zahlen liegen dicht in IR**.
5. **Satz von Archimedes** (287-212 v. u. Z., Syrakus auf Sizilien)
   Sind a, b rationale bzw. reelle Zahlen, $a > 0$, so existiert stets eine natürliche Zahl n, so dass $n * a > b$.

Beweis zu 4:
Sei $a < b \Rightarrow a + a < a + b$ und $a + b < b + b$ (Monotonie) $\Rightarrow 2a < a + b < 2b \Rightarrow a < (a + b)/2 < b$. Also liegt das arithmetische Mittel $c = (a + b)/2$ zwischen je zwei Zahlen a und b.

Anmerkung:
Im Gegensatz zu den rationalen und reellen Zahlen, die in IR dicht liegen, sagt man, dass die natürlichen Zahlen **diskret** sind.

3.5 Dezimaldarstellung der reellen Zahlen

1. Fall: $a \in$ **IN**, dann gilt (siehe Kapitel 3.1.10)

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \text{ , } a_n \neq 0,\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Schreibweise: $a = a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$

2. Fall: $a \in$ **Z \ IN**, dann ist a negative Zahl, und es gilt

$$a = -\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \text{ , } a_n \neq 0,\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Schreibweise: $a = -\ a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$

3. Fall: $a \in$ **IR \ Z,**
dann existiert eine ganze Zahl g, so dass $g < a < g + 1$ (Satz von Archimedes).
Wir zerlegen nun das Intervall $[g, g + 1]$ in 10 gleiche Teile, a liege im i. Teilintervall ($0 \leq i \leq 9$). Wir setzen $d_{-1} := i$.
Fall a: a fällt mit dem linken Endpunkt des Teilintervalls zusammen, dann gilt:
$a = g + d_{-1} * 10^{-1}$.
Schreibweise: $a = g, d_{-1}$
Fall b: sonst, dann gilt $g + d_{-1} * 10^{-1} < a < g + (d_{-1} + 1) * 10^{-1}$.
Jetzt zerlegen wir das i. Teilintervall wieder in 10 gleiche Teile. a liege nun im j. Teilintervall. Wir setzen $d_{-2} := j$. Es gibt wieder die Fälle, dass a mit dem linken Intervallende zusammentrifft oder im Innern liegt.

Im ersten Fall ist $a = g + d_{-1} * 10^{-1} + d_{-2} * 10^{-2}$, wir schreiben $\boldsymbol{a = g, d_{-1} d_{-2}}$. Im zweiten Fall zerlegen wir weiter in Teilintervalle usw. Somit ergeben sich also zwei Fälle für die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl.

endlicher Dezimalbruch
$\boldsymbol{a = g, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-n}}$

a ist rationale Zahl p / q ($p, q \in$ IN, $q \neq 0$) und $q = 2^k * 5^l$

Beispiele: 1/4 = 0,25; 1/8 = 0,125; 1/25 = 0,04

unendlicher Dezimalbruch
$\boldsymbol{a = g, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-n} \dots}$

periodisch	**nicht periodisch**
a ist rationale Zahl	a ist irrationale Zahl
1/3 = 0,33333...	$\sqrt{2} = 1{,}4142135...$
1/7 = 0,14285714...	

Divisionsalgorithmus zur Umwandlung eines Bruchs in einen Dezimalbruch
Sei $a = p / q$ ($p, q \in$ IN, $q \neq 0$)

$p = g * q + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < q$
$10 * r_1 = a_1 * q + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < q$
$10 * r_2 = a_2 * q + r_3 \qquad 0 \leq r_3 < q$
.
.
Es gilt: $p / q = g, a_1 a_2 a_3 \dots$, und nach höchstens q Schritten muss sich ein Rest wiederholen, also wird der Dezimalbruch periodisch.

3.6 Mächtigkeiten

Seien M, N Mengen.
Definition **Gleichmächtigkeit**
$\boldsymbol{M \sim N}$ (M ist **gleichmächtig** zu N): $\Leftrightarrow$ Es gibt eine 1-1-Abbildung f von M auf N.

Satz Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Definition **Abschnitt** von natürlichen Zahlen $A(n) := \{m: m \in$ IN und $m < n\}$

Definition M ist **endlich**: $\Leftrightarrow$ Es existiert eine natürliche Zahl n mit $M \sim A(n)$.

Diese eindeutig bestimmte Zahl n heißt **Mächtigkeit** oder **Kardinalzahl** von M und wird mit $|\boldsymbol{M}|$ oder **card(M)** bezeichnet.

Der Begriff der Kardinalzahl kann auf unendliche Mengen erweitert werde. Dazu definiert man **card(IN): =** $\boldsymbol{\aleph_0}$
(sprich: **Aleph Null**, $\aleph$ ist der erste Buchstabe im hebräischen Alphabet).

Erweiterung der $\leq$ - Relation auf Kardinalzahlen:
$|\boldsymbol{M}| \leq |\boldsymbol{N}|$: $\Leftrightarrow$ Es existiert eine 1-1-Abbildung f von M auf eine Teilmenge N' von N.

Definition M ist **abzählbar** unendlich: $\Leftrightarrow M \sim$ IN $\Leftrightarrow$ card(M) = $\aleph_0$
Definition M ist **höchstens abzählbar**: $\Leftrightarrow$ card(M) $\leq \aleph_0$

Für die Zahlenbereiche gelten nun folgende Mächtigkeiten:

- **IN, Z und Q sind abzählbar unendlich.**

  Um die rationalen Zahlen abzuzählen, stellt man sie durch Brüche $\frac{p}{q}$ dar, und diese wiederum erfasst man systematisch in einer Tabelle:

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

  Nun kann man links oben beginnen, die Zahlen in Schrägreihen abzuzählen. Um keine Zahlen doppelt zu haben, nimmt man nur die teilerfremden.
  Dieses Verfahren heißt **1. Cantorsches Diagonalverfahren**.

- **Die Menge IR der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.**
  Schon die Menge der Zahlen im Intervall]0, 1[: = {x: x $\in$ IR und 0 < x < 1} ist nicht abzählbar.
  Beweisidee (indirekt): Angenommen, man könne die Zahlen doch durch x_1, x_2, x_3, ... abzählen. Jede dieser Zahlen kann man als Dezimalbruch wie folgt darstellen:

  $x_1 = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots$
  $x_2 = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots$
  $x_3 = 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots$
  . . .
  $x_n = 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots$
  . . .
  Nach dem **2. Cantorschen Diagonalverfahren** bildet man nun einen Dezimalbruch
  $z = 0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots c_n \ldots$, wobei c_i verschieden von a_{ii}, 0 und 9 ist (0 und 9 werden ausgeschlossen, damit die Perioden 0 bzw. 9 nicht auftreten können). Diese Zahl z kommt aber unter den aufgezählten Zahlen x_i (i = 1, 2, 3, ...) nicht vor.

3.7 Zahlendarstellung im Computer

Der **Speicher** eines Computers ist in **Speicherzellen** aufgeteilt, die durchnummeriert sind. Eine Speicherzelle besteht aus einer festen Anzahl von **Bit**s.

Adresse	Nummer einer Speicherzelle
Bit (binary digit)	kleinste Speichereinheit, kann genau zwei Zustände annehmen
Wortlänge	Anzahl der Bits pro Speicherzelle

Im Computer können Zahlen auf zwei verschiedene Weisen dargestellt werden: mit **Festkomma (Festpunkt)** oder mit **Gleitkomma**.

Festkommadarstellung

Bei der Festkommadarstellung ist neben der Wortlänge n auch die Stellung des Kommas festgelegt. Von der Wortlänge n entfallen z. B. 1 Bit auf das Vorzeichen, n_1 Bits auf die Stellen vor und n_2 Bits auf die nach dem Komma. Im kaufmännischen Bereich verwendet man im Allgemeinen $n_2 = 2$, zur Darstellung ganzer Zahlen ist $n_2 = 0$.

Die negativen ganzen Zahlen werden im **Zweierkomplement** dargestellt: Sei z. B. $n = 8$. Dann entfällt das erste Bit auf das Vorzeichen, 0 bedeutet + und 1 bedeutet -. Gilt nun $0 \leq x \leq 2^7 - 1$ und ist D_x Dualdarstellung von x, so wird $-x$ dual durch $\overline{D}_x + 1$ dargestellt, wobei $\overline{D}_x$ aus D_x durch Austausch von Nullen und Einsen entsteht.

Beispiel: $x = 34 = 2^5 + 2^1 = 0010\ 0010 \Rightarrow -x = -34 = 1101\ 1101 + 1 = 1101\ 1110$.

Gleitkommadarstellung

Die Gleitkommadarstellung beruht auf der Tatsache, dass jede reelle Zahl z in der Form $z = m * 10^e$ bzw. $z = m' * 2^{e'}$ darstellbar ist. Dabei heißen m bzw. m' Mantisse und e bzw. e' Exponent. Damit die Darstellung eindeutig ist, wird die Mantisse normiert. Bei Turbo Pascal (Typ Real) z. B. ist die Mantisse wie folgt normiert: $1 \leq |m| < 10$, und es werden 10 Stellen nach dem Komma angezeigt.

Beispiele: 0,0001248 → $1{,}248 * 10^{-4}$ → 1.2480000000E-04
- 237555,72477123 → $-2{,}3755572477123 * 10^5$ → -2.3755572477E+05

Die Speicherung einer Gleitkommazahl erfolgt nun durch Speicherung des Vorzeichens, der Mantisse und des Exponenten.
Bemerkungen:

- Die Länge der Mantisse ist für die Genauigkeit der Darstellung zuständig.
- Die Anzahl der Bits für den Exponenten gibt die kleinste bzw. die größte darstellbare Zahl an.
- Bei der Festkommadarstellung wird der zulässige Zahlbereich äquidistant überdeckt.
- Bei der Gleitkommadarstellung kann nicht jede Zahl zwischen der kleinsten und größten dargestellt werden, z. B. muss 1/3 = 0,333333... gerundet werden. Diese Tatsache ist eine Fehlerquelle.

Beispiel Datentyp Real bei Turbo Pascal:

Vorzeichen	1 Bit
Mantisse	39 Bit
Exponent	8 Bit
Insgesamt also	48 Bit = 6 Byte.

Der Exponent kann also Werte zwischen -128 und 127 annehmen. Damit ist die größte darstellbare Zahl $2^{127} \approx 1{,}7 * 10^{38}$ und die kleinste positive Zahl $2^{-128} \approx 2{,}9 * 10^{-39}$.